1.3 Limite e Continuidade de funções vetoriais de uma variável real

Agora vamos estender a noção de *Limite* e *Continuidade* de funções escalares para funções vetoriais. De um modo geral, temos que a imagem da função vetorial se comporta de maneira análoga a uma função escalar, quando nos aproximamos de um determinado número, em cada uma das suas funções coordenadas e, por isso, tomamos o limite da função vetorial como sendo igual ao limite de cada uma das funções coordenadas, quando nos aproximamos de um determinado número, como apresentado na definição a seguir..

Definição 1.3.1 *Seja $\vec{f} : I \setminus \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial definida em todo $t \in I$ exceto, possivelmente, em a. Seja $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ um vetor constante. Então, dizemos que o Limite da função vetorial $\vec{f}$ é $\vec{v}$, e escrevemos*

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{v},$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |t - a| < \delta$, então, $||\vec{f}(t) - \vec{v}|| < \epsilon$.

Observação 1.3.1 *Observe que essa definição é muito semelhante a apresenta nos cursos de Cálculo de funções reais e, por isso, temos que a Definição 1.3.1 pode ser assim interpretada:*

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{v} \Leftrightarrow \lim_{t \to a} f_i(t) = v_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Da Observação 1.3.1 temos que calcular o limite de funções vetoriais é efetuar o cálculo do limite de funções escalares, em cada uma das funções coordenadas. Dessa forma, podemos estender as propriedades de limite de funções escalares de maneira natural para funções vetoriais, em consequência da linearidade de limite de funções escalares. Vejam algumas propriedades.

Observação 1.3.2 *Considere os seguintes limites: $\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{u}$, $\lim_{t \to a} \vec{g}(t) = \vec{v}$ e que $\lim_{t \to a} h(t) = m$. Dessa forma, temos que:*

a) $\lim_{t \to a} \left(\vec{f} \pm \vec{g}\right)(t) = \vec{u} \pm \vec{v}$;

b) $\lim_{t \to a} \left(\vec{f} \cdot \vec{g}\right)(t) = \vec{u} \cdot \vec{v}$;

c) $\lim_{t \to a} \left(\vec{f} \times \vec{g}\right)(t) = \vec{u} \times \vec{v}$, *quando o produto vetorial estiver definido;*

d) $\lim_{t \to a} \left(h \cdot \vec{f}\right)(t) = m \cdot \vec{u}$.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.3.1 *Dada a função vetorial $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{t^2 + 9}\right)\vec{i} - (2t - 4)\vec{j}$, determine $\lim_{t \to 2} \vec{f}(t)$.*

Solução: Temos que as funções coordenadas de $\vec{f}$ são $f_1(t) = \sqrt{t^2+9}$ e $f_2(t) = -(2t-4)$. Assim, temos que a função f_1 está definida em $\mathbb{R}$, pois $t^2+9 \geq 9 > 0$ e, por isso, podemos calcular o limite da função quando $x \to 2$. Logo, $\lim_{t\to 2} f_1(t) = \sqrt{2^2+9} = \sqrt{13}$.

Por outro lado, temos que a função f_2 é uma função polinomial e, consequentemente, podemos calcular o limite para qualquer valor real. Dessa forma, temos que $\lim_{t\to 2} f_2(t) = -(2.2-4) = 0$. Portanto,

$$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = \left(\sqrt{13}, 0\right).$$

■

Exemplo 1.3.2 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(e^{t-1}, \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}, \sqrt{t+4}\right)$. *Determine* $\lim_{t\to 1} \vec{f}(t)$.

Solução: Temos que $f_1(t) = e^{t-1}$ e, dessa forma, $\lim_{t\to 1} f_1(t) = e^{1-1} = e^0 = 1$.

Além disso, para $f_2(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$, como $t \to 1$, segue que $t \geq 0$ e, por isso, $\dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1} = \dfrac{(\sqrt{t}+1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1} = \sqrt{t}+1$. Consequentemente, $\lim_{t\to 1} f_2(t) = 1+1 = 2$.

Por fim, como $f_3(t) = \sqrt{t+4}$, segue que f_3 está definido para todo número real maior ou igual a -3, segue que $\lim_{t\to 1} f_3(t) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Portanto,

$$\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = \left(1, 2, \sqrt{5}\right).$$

■

Exemplo 1.3.3 *Seja* $\vec{f} : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\vec{f}(t) = \left(3 - 7t - 5t^2, \dfrac{t^2-5t+6}{t-2}\right)$. *Calcule* $\lim_{t\to 2} \vec{f}(t)$.

Solução: Temos que $f_1(t) = 3 - 7t - 5t^2$ e, por isso, $\lim_{t\to 2} f_1(t) = 3 - 7.2 - 5.2^2 = 3 - 14 - 20 = -31$.

Por outro lado, como estamos calculando o limite da função quando $t \to 2$, segue que $t \neq 2$, o que nos permite tomar $f_2(t) = \dfrac{t^2-5t+6}{t-2} = \dfrac{(t-2)(t-3)}{t-2} = t-3$ e, consequentemente, $\lim_{t\to 2} f_2(t) = 2 - 3 = -1$. Portanto,

$$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = (-31, -1).$$

■

Exemplo 1.3.4 *Seja*

$$\vec{g}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^3+8}{t+2}, \dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}, \sqrt{3+t} \right), & se \quad t \neq -2 \\ (0,0,0), & se \quad t = -2 \end{cases}.$$

Calcule, se existir, $\lim_{t \to -2} \vec{g}(t)$.

Solução: Como estamos calculando $\lim_{t \to -2} \vec{g}(t)$, segue que estamos considerando apenas valores de $t \neq -2$, o que nos permite considerar que $\vec{g}(t) = \left(\dfrac{t^3+8}{t+2}, \dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}, \sqrt{3+t} \right) = \left(\dfrac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t+2}, \dfrac{(t+2)^2}{(t+2)(t-2)}, \sqrt{3+t} \right) = \left(t^2-2t+4, \dfrac{t+2}{t-2}, \sqrt{3+t} \right)$. Assim, temos que

$$\lim_{t \to -2} \vec{g}(t) = \left(\lim_{t \to -2} \left(t^2 - 2t + 4 \right), \lim_{t \to -2} \frac{t+2}{t-2}, \lim_{t \to -2} \sqrt{3+t} \right) =$$

$$= \left(4+4+4, \frac{0}{-4}, \sqrt{3-2} \right) = (12, 0, 1).$$

■

Exemplo 1.3.5 *Calcule o limite da função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{sen(t)}{t}, \dfrac{1-\cos(t)}{t} \right)$ *quando* $t \to 0$.

Solução: Vamos calcular os limites de cada uma das funções coordenadas. Observe que $f_1(t) = \dfrac{\text{sen}(t)}{t}$ e, por isso, temos que $\lim_{t \to 0} f_1(t)$ é um dos limites fundamentais, isto é, $\lim_{t \to 0} f_1(t) = 1$. Caso não se lembre de tal informação, poderíamos também utilizar a regra de L'Hôpital, visto que $\lim_{t \to 0} \text{sen}(t) = 0 = \lim_{t \to 0} t$. Dessa forma, temos que $\lim_{t \to 0} f_1(t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{(\text{sen}(t))'}{(t)'} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\cos(t)}{1} = 1$.

Para $f_2 = \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ também utilizaremos a regra de L'Hôpital. Temos que $\lim_{t \to 0} (1-\cos(t)) = 0 = \lim_{t \to 0} t$ e, por isto, $\lim_{t \to 0} f_2(t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{(1-\cos(t))'}{(t)'} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}(t)}{1} = 0$. Portanto,

$$\lim_{t \to 0} \vec{f}(t) = (1, 0).$$

■

Exemplo 1.3.6 *Calcule* $\lim_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$, *sendo* $\vec{f}$ *a função vetorial*

$$\vec{f}(t) = \left(sen(t), \cos(t), 3t^2 - e^{2t} \right).$$

Solução: Temos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h}=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h},\cdots,\lim_{h\to 0}\frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}\right)=$$
$$=\left(f_1'(t),\cdots,f_n'(t)\right).$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h}=\left(f_1'(t),\cdots,f_n'(t)\right)=\left(\cos(t),-\text{sen}(t),6t-2e^{2t}\right).$$

■

Da mesma forma que para funções escalares, podemos considerar o limite de uma função vetorial apenas quando o parâmetro está em uma direção, ou seja, podemos calcular os *Limites Laterais* de uma função vetorial, como apesentado na observação a seguir.

Observação 1.3.3 *Os Limites Laterais de uma função vetorial são definidos de maneira análoga a limites de funções vetoriais, ou seja,*

$$\lim_{t\to a^+}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to a^+}f_1(t),\cdots,\lim_{t\to a^+}f_n(t)\right)\quad e$$
$$\lim_{t\to a^-}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to a^-}f_1(t),\cdots,\lim_{t\to a^-}f_n(t)\right).$$

Temos também que as definições de Limites Infinitos e Limites no Infinito podem ser estendidas para as funções vetoriais de maneira natural.

Agora, vamos estender outro conceito muito importante no cálculo: *Continuidade.* Basicamente temos que uma função é contínua num determinado ponto se o limite da função existe no ponto e se esse valor de limite é igual ao valor da função no ponto. Dessa forma, como limite de funções vetoriais é obtido calculando o limite de cada uma das funções coordenadas, segue que uma função vetorial vai ser contínua num ponto se cada uma das suas funções coordenadas forem contínuas nesse ponto, conforme apresentado na definição a seguir.

Definição 1.3.2 *Seja $\vec{f}: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ uma função vetorial. Então, dizemos que $\vec{f}$ é* ***Contínua*** *num ponto $a\in I$ se*

i. $\vec{f}(a)$ *existe;*

ii. $\lim_{(t)\to a}\vec{f}(t)$ *existe;*

iii. $\displaystyle\lim_{(t)\to a}\vec{f}(t)=\vec{f}(a)$.

Em outras palavras, a Definição 1.3.2 nos diz que uma função vetorial $\vec{f}: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ é contínua num ponto $a\in I$ se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas é contínua em $a\in I$. Como a definição de continuidade está diretamente relacionada com a de limite, segue que as propriedades para continuidade de funções vetoriais são análogas as obtidas para o cálculo de limites (1.3.1), como visto a seguir.

Observação 1.3.4 *Sejam $\vec{f}, \vec{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais contínuas em $a \in I$ e h uma função escalar também contínua em a. Assim, temos que são válidas as seguintes propriedades para a continuidade:*

a) $\vec{f} \pm \vec{g}$ *é contínua em a;*

b) $\vec{f} \cdot \vec{g}$ *é contínua em a;*

c) $\vec{f} \times \vec{g}$ *é contínua em a, quando o produto vetorial estiver definido.*

d) $h\vec{f}$ *é contínua em a.*

Definição 1.3.3 *Dizemos que $\vec{f}$ é Contínua se $\vec{f}$ for contínua em todo $a \in D_{\vec{f}}$.*

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.3.7 *Seja a função vetorial $\vec{f}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j}$. Então, como $f_1(t) = t$ (que é uma função polinomial) e $f_2(t) = -t^2$ (que também é uma função polinomial), segue que f_1 e f_2 são contínuas em todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, segue que $\vec{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

■

Exemplo 1.3.8 *Seja $\vec{f}(t) = \left(e^{t-1}, \dfrac{t-1}{t^2-1}, 3t\right)$. Então, temos que $f_1(t) = e^{x-1}$ é uma função exponencial e, por isso, f_1 é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que $f_3(t) = 3t$ é uma função polinomial e, consequentemente, f_3 também é contínua em todo $\mathbb{R}$. Para $f_2(t) = \dfrac{t-1}{t^2-1}$, temos que f_2 é uma função racional (a divisão de duas funções polinomiais) e, por isso, temos que f_2 é contínua apenas nos pontos de $\mathbb{R}$ tais que o denominador da função racional $(t^2 - 1)$ seja diferente de zero, ou seja, apenas para valores reais tais que $t \neq \pm 1$. Portanto, $\vec{f}$ é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}$ tais que $t \neq \pm 1$.*

■

Exemplo 1.3.9 *A Função $\vec{g}$ dada no Exemplo 1.3.4 não é contínua em $t = -2$, visto que $\lim\limits_{(t)\to -2} \vec{g}(t) \neq (12, 0, 1)$. Contudo, reescrevendo a função por*

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^3+8}{t+2}, \dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}, \sqrt{3+t}\right), & se \quad t \neq -2 \\ (12, 0, 1), & se \quad t = -2 \end{cases}$$

temos que a nova função $\vec{f}$ passa a ser contínua em $t = -2$.

Agora, pratique com alguns exercícios.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1 *Calcule o valor de cada um dos limites a seguir.*

a) $\lim_{t\to 2}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(2t+4,\dfrac{t^2-4}{t-2},\dfrac{t+4}{3t-1}\right)$;

b) $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(3-7t-5t^2,(t-2)^{10}(t+4)^2\right)$;

c) $\lim_{t\to 3}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(3t^2-7t+2,\dfrac{2t^3-5t^2-2t-3}{4t^3-13t^2+4t-3},\dfrac{4t-5}{5t-1}\right)$;

d) $\lim_{t\to -1}\vec{f}(t)$, *sendo*
$\vec{f}(t)=\left(-t^5+6t^4+2,(t+4)^3(t+2)^{-1},\dfrac{2t^2-t-3}{t^3+2t^2+6t+5}\right)$;

e) $\lim_{t\to 2}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{t+3}{t+2}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{t^2+5t+6}{t+2}\right)\vec{j}-\left(\dfrac{t^2-5t+6}{t-2}\right)\vec{k}$;

f) $\lim_{t\to \frac{1}{2}}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=(2t+7)\,\vec{i}+\left(\dfrac{4t^2-1}{2t-1}\right)\vec{j}-\left(\dfrac{t+4}{2t}\right)\vec{k}$.

g) $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{sen(4t)}{t},\dfrac{2t}{sen(3t)},\dfrac{sen(9t)}{sen(7t)},\dfrac{sen(3t)}{sen(6t)}\right)$;

h) $\lim_{t\to \frac{1}{2}}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{sen^3(t)}{t^2},\dfrac{t^2}{sen^2(3t)}\right)$.

Exercício 1.4.2 *Calcule, se existir, os limites laterais de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

a) $\lim_{t\to 2^+}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{t+2}{t^2-4}\right)\vec{i}+2t\vec{j}+\left(\dfrac{t+2}{4-t^2}\right)\vec{k}$;

b) $\lim_{t\to 3^+}\vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{\sqrt{t^2-9}}{t-3},\dfrac{\sqrt{[[t]]-t}}{3-t}\right)$.

Exercício 1.4.3 *Estude a continuidade de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

a) $\vec{f}(t)=\left(\dfrac{t^2+t-6}{t+3}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{t^2-3t-4}{t-4}\right)\vec{j}$;

b) $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t^2+t-6}{x+3},2t,\dfrac{t^2+6t+9}{t^2-9}\right), & se\quad t\neq -3\\ (1,-6,0), & se\quad t=-3\end{cases}$;

c) $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t^2-3t-4}{t-4},t^2-12\right), & se\quad t\neq 4\\ (2,4), & se\quad t=4\end{cases}$.