Capítulo 1

Funções vetoriais de uma variável real

Nesse capítulo será feito um estudo das Funções vetoriais de uma variável Real, estudo esse semelhante ao feito nos cursos de Cálculo. Dessa forma, na Seção 1.1 será apresentada a a definição de funções vetoriais de uma variável real; na Seção 1.3 estudaremos limites e continuidade de funções vetoriais de uma variável real. Na Seção 1.5 estudaremos os conceitos relacionados com a diferenciabilidade de funções vetoriais. Já na Seção 1.7 vamos apresentar os conceitos relacionados a Integração de funções vetoriais e na Seção 1.9 falaremos do Comprimento de Arco. Por fim, na Seção 1.11 trabalharemos algumas das parametrizações que mais utilizaremos nesse curso.

1.1 Definição e exemplos

Suponha, por exemplo, que uma partícula esteja se movimentando de tal forma que para cada instante t as suas coordenadas sejam dadas por $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. Logo, para cada instante $t \geq 0$ existe um vetor $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que representa a sua posição.
Dessa forma, podemos pensar numa "aplicação" que associa a cada número real t, não negativo, a um único vetor $\vec{f}(t)$. Essa aplicação é chamada de *Função Vetorial de uma Variável Real*, como apresentamos na definição a seguir.

Definição 1.1.1 *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais de uma variável real t. Então, o vetor $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dado por*

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$$

é chamado de Função Vetorial de uma Variável Real. Cada uma das funções $f_1, f_2, \cdots, f_n$ são chamadas de Funções Coordenadas.

Exemplo 1.1.1 *Considere a função vetorial $\vec{f}(t) = (\sqrt{t}, t)$. Então, temos que $f_1(t) = \sqrt{t}$, com $D_{f_1} = \mathbb{R}_+$. Além disso, temos que $f_2(t) = t$ com $D_{f_2} = \mathbb{R}$. Portanto, temos que*

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}_+.$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{f}}$ é dado por

$$Im_{\vec{f}} = \{(\sqrt{t}, t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Um esboço do gráfico pode ser visto na Figura 1.1.

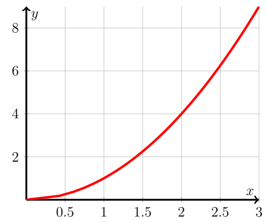

Figura 1.1: Representação do gráfico da função vetorial do Exemplo 1.1.1.

■

Observação 1.1.1 *a) O Conjunto Domínio $D_{\vec{f}}$ de uma função vetorial $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é formado pela intersecção dos domínios de cada uma das funções coordenadas $f_i : I_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, isto é,*

$$D_{\vec{f}} = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n.$$

b) Além disso, o Conjunto Imagem $Im_{\vec{f}}$ da função vetorial $\vec{f}$ é definido da mesma forma que para funções escalares, ou seja, $Im_{\vec{f}}$ é o conjunto dado por

$$Im_{\vec{f}} = \vec{f}\left(D_{\vec{f}}\right) = \left\{\omega \in \mathbb{R}^n; \omega = \vec{f}(t) \text{ para algum } t \in D_{\vec{f}}\right\}.$$

c) Quando estamos no espaço euclidiano, isto é, quanto temos $n = 3$, é comum utilizar a notação

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k},$$

para representar uma função vetorial, lembrando que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os vetores da base canônica ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

Vejamos mais exemplos.

Exemplo 1.1.2 *Considere a função vetorial $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\vec{f}(t) = \left(\sqrt{t-2}, (t-3)^{-1}\right).$$

Então, temos que $f_1(t) = \sqrt{t-2}$ está definida para todo número real tal que $t - 2 \geq 0$, isto é,

$$D_{f_1} = [2, +\infty[.$$

Por outro lado, temos que $f_2(t) = (t-3)^{-1} = \dfrac{1}{t-3}$ e, por isto, f_2 está definida para todo número real tal que $t - 3 \neq 0$, isto é,

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Portanto, temos que

$$D_{\vec{f}} = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 2 \ e \ t \neq 3\} = [2, +\infty[\backslash\{3\}.$$

O conjunto imagem fica dado por

$$Im_{\vec{f}} = \left\{\omega \in \mathbb{R}^2; \omega = \vec{f}(t), \ t \in D_{\vec{f}}\right\}.$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.1.3 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = 2sen(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2\vec{k}$. *Então, temos que* $f_1(t) = 2sen(t)$ *e, consequentemente* $D_{f_1} = \mathbb{R}$. *Além disso, temos que* $f_2(t) = 2\cos(t)$ *e, também temos que* $D_{f_2} = \mathbb{R}$. *Por fim,* $f_3(t) = 2$ *e por ser uma função constante, temos que* $D_{f_3} = \mathbb{R}$. *Portanto, temos que*

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}.$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{f}}$ *é sado por*

$$Im_{\vec{f}} = \{(2sen(t), 2\cos(t), 2) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}.$$

Um esboço do gráfico da função vetorial $\vec{f}(t)$ *pode ser visto na Figura 1.2.*

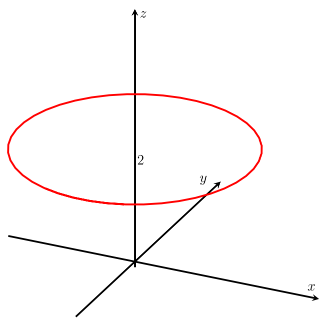

Figura 1.2: Representação do gráfico da função vetorial do Exemplo 1.1.3.

$\blacksquare$

Exemplo 1.1.4 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = 2sen(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + t\vec{k}$, *com* $0 \leq t \leq 4\pi$. *Para esse caso, temos que o conjunto domínio* $D_{\vec{f}}$ *já está determinado pela definição do parâmetro* t *e, por isto,*

$$D_{\vec{f}} = [0, 4\pi].$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{f}}$ *é dado por*

$$Im_{\vec{f}} = \{(2sen(t), 2\cos(t), t); t \in [0, 4\pi]\}.$$

Um esboço do gráfico da função vetorial $\vec{f}(t)$ *pode ser visto na Figura 1.3.*

$\blacksquare$

Exemplo 1.1.5 *Encontre o conjunto domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções vetoriais a seguir:*

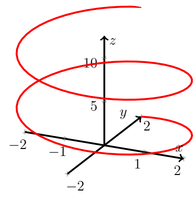

Figura 1.3: Esboço do conjunto $Im_{\vec{f}}$ do Exemplo 1.1.4.

a) $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$;

b) $\vec{g}(t) = \left(\sqrt{4-t^2}, \dfrac{t-5}{2t-2}, 2\right)$;

c) $\vec{h}(t) = (\sqrt{t^2-9}, t, t^2)$.

Solução:

a) Temos que $f_1(t) = t$ é uma função polinomial, logo $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Por outro lado, temos que $f_2(t) = t^2$ também é uma função polinomial e, consequentemente, $D_{f_2} = \mathbb{R}$. Por fim, temos que $f_3(t) = t^3$ também é uma função polinomial, logo $D_{f_3} = \mathbb{R}$. Portanto, o conjunto domínio $D_{\vec{f}}$ é dado por

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{f}}$ é dado por

$$Im_{\vec{f}} = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Temos que $g_1(t) = \sqrt{4-t^2}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $t^2 - 4 \geq 0$, ou seja, $D_{g_1} = [-2, 2]$. Por outro lado, temos que $g_2(t) = \dfrac{t-5}{2t-2}$ é uma função racional e, por isso, g_2 está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $2t - 2 \neq 0$, ou seja, $D_{g_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Por fim, temos que $g_3(t) = 2$ é uma função polinomial, logo $D_{g_3} = \mathbb{R}$. Portanto, $D_{\vec{g}}$ é dado por

$$D_{\vec{g}} = ([-2, 2]) \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap \mathbb{R} = [-2, 2] \setminus \{1\}.$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{g}}$ é dado por

$$Im_{\vec{g}} = \left\{ \left(\sqrt{t^2-4}, \frac{t-5}{2t-2}, 2\right) \in \mathbb{R}^3; t \in [-2, 2] \setminus \{1\} \right\}.$$

c) Temos que $h_1(t) = \sqrt{t^2-9}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $t^2 - 9 \geq 0$, ou seja, $D_{h_1} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. Por outro lado, temos que $h_2(t) = t$ e $h_3(t) = t^2$ são funções polinomiais e, consequentemente, $D_{h_2} = D_{h_3} = \mathbb{R}$. Portanto, o conjunto domínio $D_{\vec{h}}$ é dado por

$$D_{\vec{h}} = (]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[) \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[.$$

O conjunto imagem $Im_{\vec{h}}$ é dado por

$$Im_{\vec{h}} = \left\{ (\sqrt{t^2-9}, t, t^2) \in \mathbb{R}^3; t \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[\right\}.$$

■

Observação 1.1.2 *Uma curva, que é a imagem de uma função vetorial, pode ser definida de três formas:*

- *Explicitamente;*
- *Implicitamente;*
- *Parametricamente.*

Uma função está definida explicitamente quando o seu gráfico é obtido exatamente pela função que a define. Por exemplo, tomando $f(x) = x^2$, com $x \geq 0$, temos que f é uma representação explícita para a função cujo gráfico é dado pela Figura 1.1.
Por outro lado, temos que uma função está definida implicitamente quando o seu gráfico é obtido pela relação $R(x, f(x)) = 0$. Por exemplo, a Figura 1.2 representa o gráfico da função dada implicitamente pela expressão $x^2+y^2 = 4$ e $z = 2$.
Por fim, uma função está definida parametricamente quando existe um conjunto de equações que expressam as variáveis independentes, através de um parâmetro. Dessa forma, temos que uma função vetorial $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser vista como sendo a representação paramétrica de uma função escalar. Por exemplo, tomando $x = 2\text{sen}(t)$, $y = 2\cos(t)$ e $z = 2$ no Exemplo 1.1.3, temos que

$$x^2 + y^2 = (2\text{sen}(t))^2 + (2\cos(t))^2 = 4$$

e, por isso, temos que $\vec{f}(t) = 2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2\vec{k}$ é uma representação paramétrica para a circunferência de raio 2 centrada no ponto $(0, 0, 2)$ contida no plano $z = 2$.

Exemplo 1.1.6 *Utilize as coordenadas cartesianas para reescrever a função vetorial* $\vec{f}(t) = (3\cos(3t), 3sen(3t), -1)$.

Solução: Observe que $\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1$. Desta forma, tomando $x = 3\cos(3t)$, $y = 3\text{sen}(3t)$ e $z = -1$, temos que

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2(3t) + 9\text{sen}^2(3t) = 9 \text{ e } z = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \text{ e } z = -1.$$

Portanto, reescrevendo a função $\vec{f}$ obtermos a expressão

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ e } z = -1.$$

■

Como estamos associando uma função vetorial a um vetor, podemos estender as definições das operações de vetores para as funções vetoriais, utilizando coordenada-coordenada, as operações entre funções, como ilustrado na observação a seguir.

Observação 1.1.3 *Considere $\vec{f}, \vec{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções vetoriais dadas, respectivamente por $\vec{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$ e $\vec{g}(t) = (g_1(t), \cdots, g_n(t))$. Considere também a função escalar $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Desta forma, temos que são válidas as seguintes operações:*

a) ***Soma***: $(\vec{f} \pm \vec{g})(t) = (f_1(t) \pm g_1(t), \cdots, f_n(t) \pm g_n(t))$;

b) ***Produto por Escalar***: $(h\vec{f})(t) = (h(t).f_1(t), \cdots, h(t).f_n(t))$;

c) ***Produto Interno***: $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \vec{f} \cdot \vec{g} = f_1(t).g_1(t) + \cdots + f_n(t).g_n(t)$;

d) etc.

Exemplo 1.1.7 *Considere as funções vetoriais $\vec{f}(t) = (2t - t^{-1}, \sqrt{t^3 - 8})$ e $\vec{g}(t) = t^3\vec{i} - 2t^{-1}\vec{j}$ e considere a função escalar $h(t) = 3(t-1)^{-1}$. Efetue as operações a seguir, encontrando o conjunto domínio de cada uma das novas funções obtidas.*

a) $(\vec{f} + \vec{g})(t)$; *b)* $(\vec{f}.\vec{g})(t)$; *c)* $(h.\vec{g})(t)$; *d)* $\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle$.

Solução: Temos que $f_1 = 2t - t^{-1} = 2t - \dfrac{1}{t}$ e, por isto, $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$. Já $f_2 = \sqrt{t^3 - 8}$ e, por esta razão, f_2 está definida para todo número real tal que $t^3 - 8 \geq 0$ isto é, $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\} = [2, +\infty[$. Portanto, $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}^* \cap [2, +\infty[= [2, +\infty[$. Para a função $\vec{g}$, temos que $g_1 = t^3$ (que é uma função polinomial), logo $D_{g_1} = \mathbb{R}$. Além disso, temos que $g_2 = -2t^{-1} = \dfrac{-2}{t}$ e, por isto, $D_{g_2} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$. Portanto, $D_{\vec{g}} = \mathbb{R}^*$. Por fim, como $h(t) = 3(t-1)^{-1} = \dfrac{3}{t-1}$, segue que $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Agora, vamos as operações.

a) Temos que

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = (f_1(t), f_2(t)) + (g_1(t), g_2(t)) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t)) =$$
$$= \left(2t - t^{-1}, \sqrt{t^3 - 8}\right) + \left(t^3, -2t^{-1}\right) = \left(t^3 + 2t - t^{-1}, -2t^{-1} + \sqrt{t^3 - 8}\right),$$

sendo que $D_{\vec{f}+\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}} = [2, +\infty[$.

b) Temos que

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = (f_1(t), f_2(t)) \cdot (g_1(t), g_2(t)) = f_1(t) \cdot g_1(t) + f_2(t) \cdot g_2(t) =$$
$$= \left(2t - t^{-1}\right) \cdot t^3 + \left(\sqrt{t^3 - 8}\right) \cdot \left(-2t^{-1}\right) = 2t^4 - t^2 - 2t^{-1}\sqrt{t^3 - 8},$$

sendo nesse caso também que $D_{\vec{f}\cdot\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}} = [2, +\infty[$.

c) Temos que

$$(h \cdot \vec{g})(t) = h(t) \cdot (g_1(t), g_2(t)) = (h(t)g_1(t), h(t)g_2(t)) =$$
$$= 3(t-1)^{-1}\left(t^3, -2t^{-1}\right) = \left(3t^3(t-1)^{-1}, -6\left[t(t-1)\right]^{-1}\right),$$

sendo que $D_{h\vec{g}} = D_h \cap D_{\vec{g}} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

d) Temos que

$$\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle = (\vec{f} \cdot \vec{f})(t) = (f_1(t), f_2(t)) \cdot (f_1(t), f_2(t)) = f_1(t)^2 + f_2(t)^2 =$$

$$= \left(2t - t^{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{t^3 - 8}\right)^2 = 4t^2 - 4 + t^{-2} + t^3 - 8 = t^3 + 4t^2 + t^{-2} - 12,$$

sendo nesse caso $D_{\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle} = D_{\vec{f}} = [2, +\infty[$.

■

Agora vamos a alguns exercícios.

1.2 Exercícios

Exercício 1.2.1 *Determine os conjuntos domínio e imagem de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

1. $\vec{f}(t) = \left(t^2, \dfrac{1}{t-4}, \sqrt{4 - t^2}\right)$;
2. $\vec{g}(t) = \left(\sqrt{t-2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{t^2 - 4t + 3}\right)\vec{j}$
3. $\vec{f}(t) = -\left(\sqrt[3]{t+7} - \sqrt[5]{t+8}\right)\vec{i} - (|t+2| + 4)\,\vec{k}$;
4. $\vec{g}(t) = \left(\sqrt{3+t} + \sqrt[4]{7-t}, \dfrac{t+2}{t-7}, t - \dfrac{1}{t}\right)$;
5. $\vec{h}(t) = \left(\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}, \dfrac{1}{1+\sqrt{t}}, t^2 + 8t + 14\right)$;
6. $\vec{f}(t) = (-t^2 + 4t - 1)\,\vec{i} + (t-2)^{-2}\vec{j} - (t+2)^{-2}\vec{k}$;
7. $\vec{g}(t) = t^3\vec{i} - t^{-3}\vec{j} + |t|\vec{k}$;
8. $\vec{g}(t) = \left(12t - 13, \sqrt{2t}, |2t| - 3, 3 - t, 3 - |t|^{-1}\right)$;
9. $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t^2 + 2t - 8}{t-2}, \dfrac{t^3 + 3t^2 - 4t - 12}{t^2 + t - 6}\right)$.

Exercício 1.2.2 *Para cada par de funções vetoriais abaixo, obtenha as funções* $\vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} - \vec{g}$, $\vec{f} \cdot \vec{g}$, $\vec{f} \cdot \vec{f}$, $\vec{g} \cdot \vec{g}$ *e, quando possível* $\vec{f} \times \vec{g}$ *e* $\vec{g} \times \vec{f}$. *Escreva também o conjunto domínio de cada uma das novas funções encontradas.*

a) $\vec{f}(t) = (2t, t^2 + 1)$ *e* $\vec{g}(t) = (3t - 2)\,\vec{i} + |t|\vec{j}$;

b) $\vec{f}(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{1}{t}\vec{j} + \sqrt{t+1}\vec{k}$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t - 2, \sqrt{t-2}, \sqrt{t-3}\right)$;

c) $\vec{f}(t) = \left(t^3, \dfrac{1}{t^3}, t - 5\right)$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t^2 - 1, \sqrt{t}, t^2 + 1\right)$;

d) $\vec{f}(t) = \dfrac{t+1}{t-1}\vec{i} - \dfrac{1}{t}\vec{k}$ *e* $\vec{g}(t) = \sqrt{t}\vec{j} + (4 - t^2)$;

e) $\vec{f}(x) = \left(\sqrt{t+4}, t^2-4, \sqrt{t+2}, t^2+4\right)$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t^2-9, \sqrt{t+5}, \sqrt{t^2-4}, \sqrt{t^2-9}\right)$.

Exercício 1.2.3 *Para cada par de funções abaixo, obtenha a função* $g \cdot \vec{f}$*. Escreva também o conjunto domínio de cada uma das novas funções encontradas.*

a) $\vec{f}(t) = (2t, t^2+1)$ *e* $g(t) = 3t^4$*;*

b) $\vec{f}(t) = \left(t-2, \sqrt{t-2}, \sqrt{t-3}\right)$ *e* $g(t) = \sqrt{t-3}$*;*

c) $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{t+4}, t^2-4, \sqrt{t+2}, t^2+4\right)$ *e* $g(t) = \sqrt{t+2}$.

Exercício 1.2.4 *Dada a função vetorial* $\vec{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $\vec{f}(t) = (2cos(t), 3sen(t))$*, com* $0 \leq t \leq 2\pi$*, faça:*

a) Desenhe o conjunto imagem da função $\vec{f}$*;*

b) Desenhe o gráfico da função $\vec{f}$.

Exercício 1.2.5 *Faça um esboço de cada uma das curvas dadas parametricamente pelas expressões:*

a) $\vec{f}(t) = (t+1, 2t+1, 1)$ *com* $t \in \mathbb{R}$*;*

b) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$ *com* $0 \leq t \leq 1$*;*

c) $\vec{f}(t) = (2t, t)$ *com* $-1 \leq t \leq 1$*;*

d) $\vec{f}(t) = (t, t, t^2)$ *com* $-1 \leq t \leq 2$*;*

e) $\vec{f}(t) = (2t, |t|)$ *com* $-1 \leq t \leq 2$.