1.5 Dependência Linear entre vetores

De uma forma geral, quando trabalhamos com os entes da geometria (retas e planos), precisamos determinar se eles são, ou não, paralelos. Nessa seção trabalharemos nesse sentido.

Observação 1.5.1 *É importante ressaltar que:*

a) *O vetor nulo, por convenção, é paralelo a qualquer reta e a qualquer plano.*

b) *Um vetor $\vec{u}$ é paralelo a uma reta se ele possuir um representante que esteja contido nessa reta.*

c) *Um vetor $\vec{u}$ é paralelo a um plano se ele possuir um representante que esteja contido nesse plano.*

d) *Dois vetores paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si.*

Agora, vamos a definição de *Dependência Linear*, para isso, vamos a definição de *Sequência de Vetores*.

Definição 1.5.1 *Seja $n \in \mathbb{N}$. O símbolo $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ indica uma n-upla ordenada de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$.*

Observação 1.5.2 *Sejam $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n)$ e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ duas n-uplas ordenadas de vetores. Assim,*

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n) \Leftrightarrow \vec{u}_1 = \vec{v}_1, \vec{u}_2 = \vec{v}_2, \cdots, \vec{u}_n = \vec{v}_n.$$

Além disso, para $n = 2$ temos um par ordenado de vetores e para $n = 3$ temos um terno ordenado de vetores.

Definição 1.5.2 *Seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ uma n-upla de vetores ordenados e $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ uma n-upla de escalares. Se*

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,$$

então, dizemos que $\vec{u}$ é uma Combinação Linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$. Além disso, dizemos que os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são os Coeficientes da combinação linear e que o vetor $\vec{u}$ é Gerado por $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$.

Exemplo 1.5.1 *O vetor nulo é dado pela combinação de qualquer n-upla ordenada de vetores.*
De fato: *Seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ uma n-upla de vetores ordenados. Assim,*

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n.$$

□

■

Definição 1.5.3 *Dizemos que uma sequência de vetores ordenados* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ *são Linearmente Dependentes, ou LD, se existem escalares* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$*, nem todos nulos, tais que a combinação linear* $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ *gera o vetor nulo, ou seja,*

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n.$$

Definição 1.5.4 *Dizemos que uma sequência de vetores ordenados* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ *são Linearmente Independentes, ou LI, se ela não for LD.*

Observação 1.5.3 *Das Definições 1.5.3 e 1.5.4 temos que se* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ *são LI, então,* $\vec{v}_i \neq 0$*, para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*.*

Exemplo 1.5.2 *Mostre que se dois vetores são paralelos, então, eles são LD.*

Solução: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores paralelos. Dessa forma, temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Assim, como $\vec{u} - \alpha\vec{v} = \alpha\vec{v} - \alpha\vec{v} = \vec{0}$, segue que existe um par de escalar $(1, -k)$ tal que a combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ gera o vetor nulo e, por isso, eles são LD. ■

Exemplo 1.5.3 *Mostre que se dois vetores são paralelos, então, qualquer n-upla ordenadas de vetores que contém esses vetores são LD.*

Solução: Seja $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ uma n-upla ordenada tal que $\vec{u}, \vec{v} \in (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$. Dessa forma, existem índices i e j em $\{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $\vec{u} = \vec{v}_i$ e $\vec{v} = \vec{v}_j$. Assim, tomando a n-upla ordenada $(0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0, -\alpha, 0, \cdots, 0)$, com todos os elementos iguais a zero, exceto, na posição i, que vale 1, e na posição j, que vale $-\alpha$, segue que

$$\vec{0} = 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_{i-1} + 1\vec{v}_i + 0\vec{v}_{i+1} + \cdots + 0\vec{v}_{j-1} - k\vec{v}_j + 0\vec{v}_{j+1} + \cdots + 0\vec{v}_n$$

e, consequentemente, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ é LD. ■

Proposição 1.5.1 $(\vec{u}, \vec{v})$ *é LI implica em* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *é LD se, e somente se,* $\vec{w}$ *é uma combinação linear de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*.*

Demonstração: Suponha que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI implica em $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD. Se $\vec{w} \parallel \vec{u}$, segue que $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ e, consequentemente, $\vec{w} = \alpha\vec{u} + 0\vec{v}$ e, por isso, $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Analogamente, se $\vec{w} \parallel \vec{v}$, segue que $\vec{w} = \beta\vec{v}$ e, consequentemente, $\vec{w} = 0\vec{u} + \beta\vec{v}$ e, por isso, $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, só falta provar que $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quando $\vec{w}$ não é paralelo nem a $\vec{u}$ e nem a $\vec{v}$.

Como $\vec{w}$ não é paralelo nem a $\vec{u}$ e nem a $\vec{v}$, segue que $\vec{w} \neq \vec{0}$. Considere os pontos P, A, B e C tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Observe que esses pontos P, A, B e C são coplanares, visto que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD. Com a mesma ideia, temos que P, A e B não são colineares, visto que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI.

Pelo ponto C trace retas paralelas aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrando os pontos M e N, respectivamente. Daí, $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u}$ e $\overrightarrow{PN} = \beta\vec{v}$. Assim,

$$\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Reciprocamente, se $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. ■

Proposição 1.5.2 *No espaço euclidiano, se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI, então, qualquer outro vetor $\vec{x}$ do espaço é uma combinação linear de $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$.*

Demonstração: Sejam P,A,B,C e D pontos tais que $\vec{u}=\overrightarrow{PA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{PB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{PC}$ e $\vec{x}=\overrightarrow{PD}$., como visto na Figura 1.24.

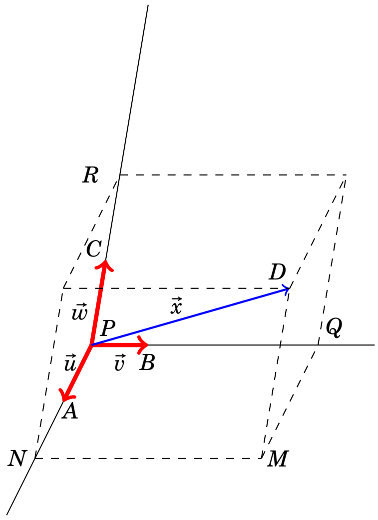

Figura 1.24: Ilustração de quatro vetores num espaço.

Trace uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{PC}$, obtendo o ponto M no plano que contém os vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$. Trace uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{PA}$, passando por M, obtendo o ponto N e trace uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{PB}$, passando por M, obtendo o ponto Q. Por D, passe uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{PM}$, obtendo o ponto R no eixo que contém o vetor $\overrightarrow{PC}$.

Como $\overrightarrow{PN} \parallel \overrightarrow{PA}$, segue que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PN}=\alpha\overrightarrow{PA}$. Da mesma forma, como $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{PB}$, segue que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PQ}=\beta\overrightarrow{PB}$. Por fim, como $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PC}$, segue que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PR}=\gamma\overrightarrow{PC}$. Portanto,

$$\vec{x}=\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC},$$

ou seja, $\vec{x}$ é uma combinação linear de $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$. ■

Exemplo 1.5.4 *Seja $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{b}=\vec{u}-\vec{w}$ e $\vec{c}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$. Mostre que $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ é LD, independente de quais sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.*

Solução: Como $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{b}=\vec{u}-\vec{w}$ e $\vec{c}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$, mostremos que uma combinação linear de $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ da o vetor nulo, mesmo sem que os escalares sejam todos nulos. Para isso, sejam $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$, tais que $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$. Assim,

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow \alpha(\vec{u}+\vec{v})+\beta(\vec{u}-\vec{w})+\gamma(\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w})=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes, temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - (0 - 2 + 1) = 0$$

e, por isso, temos que o sistema possui infinitas soluções, ou seja, os três vetores não são LI. Portanto, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ é um conjunto LD. Observe que $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$. ∎

Observação 1.5.4 *a) No plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, se dois vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ não são colineares, ou seja, se eles são LI, então, todo vetor $\vec{w}$ do plano é dado por uma combinação linear da forma $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, como ilustrado na Figura 1.25.*

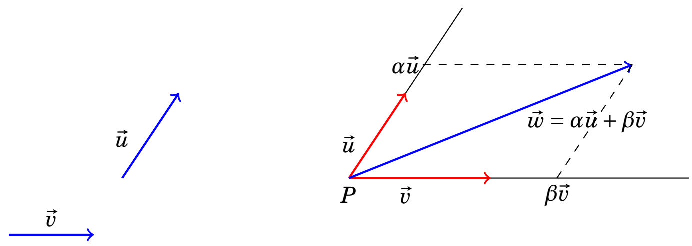

Figura 1.25: Ilustração de um vetor $\vec{w}$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano.

Portanto, se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são três vetores coplanares, então, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

b) No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, se três vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ não são coplanares, ou seja, se eles são LI, então, todo vetor $\vec{x}$ do plano é dado por uma combinação linear da forma $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, como ilustrado na Figura 1.26.

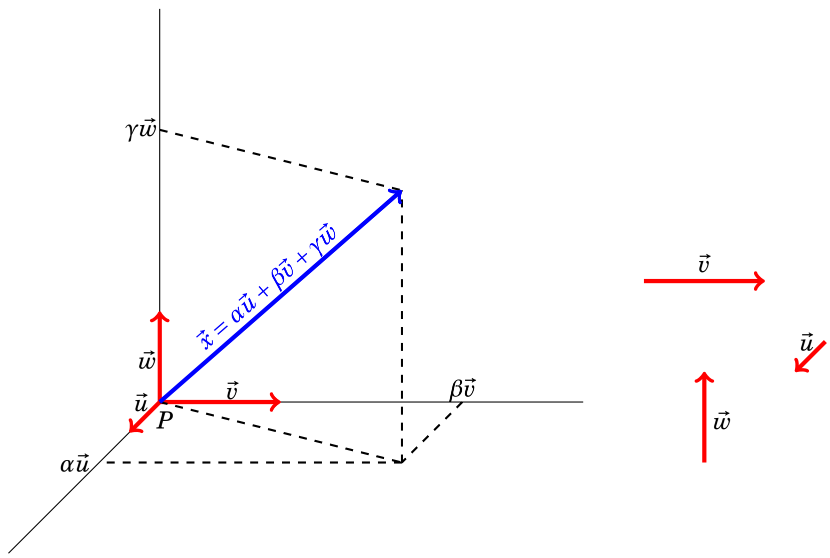

Figura 1.26: Ilustração de um vetor $\vec{x}$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no espaço.

Portanto, se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{x}$ são quatro vetores no espaço, então, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ é um conjunto LD.

Proposição 1.5.3 *Uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$, com $n \geq 2$, é LD se, e somente se, um dos vetores da sequência é uma combinação linear dos demais vetores.*

Demonstração: Essa demonstração é uma generalização das ideias utilizadas na demonstração da Proposição 1.5.1 e, por isso, será omitida nessas notas. ■

Proposição 1.5.4 *Uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$, com $n \geq 2$, é LI se, e somente se, a equação $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Demonstração: Essa demonstração é uma generalização das ideias utilizadas na demonstração da Proposição 1.5.2 e, por isso, será omitida nessas notas. ■

Exemplo 1.5.5 *Sejam $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w}$. Prove que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI se, e somente se, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ é LI.*

Solução: Suponha que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LI. Então, para qualquer combinação linear desses vetores sendo igual ao vetor nulo nos dá que as constantes que estão multiplicando esses vetores são todas nulas. Assim,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha(\vec{u} + \vec{w}) + \beta(2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \gamma(\vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\alpha + 2\beta\right)\vec{u} + \left(\beta + \gamma\right)\vec{v} + \left(\alpha - \beta - 2\gamma\right)\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 0 \\ \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0 \text{ e } \gamma = 0.$$

Portanto, como a combinação linear $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$, segue que $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ é LI.

Reciprocamente, suponha que $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ seja LI. Como $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w}$, temos que:

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{w},\ \vec{v} = \vec{c} + 2\vec{w} \text{ e, por issso, } \vec{b} = 2(\vec{a} - \vec{w}) + (\vec{c} + 2\vec{w}) - \vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},\ \vec{v} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} \text{ e } \vec{u} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

Dessa forma,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\left(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right) + \beta\left(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}\right) + \gamma\left(2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\alpha + 4\beta + 2\gamma\right)\vec{a} + \left(\alpha - 2\beta - \gamma\right)\vec{b} + \left(-\alpha + 3\beta + \gamma\right)\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 4\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha - 2\beta - \gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0 \text{ e } \gamma = 0.$$

Portanto, como a combinação linear $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$, segue que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI. ■

Exemplo 1.5.6 *Seja* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ *um conjunto LI. Prove que*

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\cdots+\beta_n\vec{v}_n \Rightarrow \alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \cdots, \alpha_n=\beta_n.$$

Solução: Observe que

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\cdots+\beta_n\vec{v}_n \Rightarrow \left(\alpha_1-\beta_1\right)\vec{v}_1+\left(\alpha_2-\beta_2\right)\vec{v}_2+\cdots+\left(\alpha_n-\beta_n\right)\vec{v}_n=\vec{0}.$$

Daí, como $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ um conjunto LI, segue que $\alpha_1-\beta_1=0$, $\alpha_2-\beta_2=0$, $\cdots$, $\alpha_n-\beta_n=0$, ou seja, $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \cdots, \alpha_n=\beta_n$. ■

Exemplo 1.5.7 *Determine a e b, sabendo que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *é LI e que* $(a-1)\vec{u}+b\vec{v} = b\vec{u}-(a+b)\vec{v}$.

Solução: Observe que

$$(a-1)\vec{u}+b\vec{v} = b\vec{u}-(a+b)\vec{v} \Rightarrow (a-b-1)\vec{u}+(a+2b)\vec{v}=\vec{0}.$$

Assim, como $(\vec{u}, \vec{v})$ é um conjunto LI, segue que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b-1 & = & 0 \\ a+2b & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b & = & 1 \\ a & = & -2b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{2}{3} \\ \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Portanto, $a=\dfrac{2}{3}$ e $b=-\dfrac{1}{3}$. ■

Proposição 1.5.5 *Uma sequência* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$*, com* $n \geq 2$*, é LD se, e somente se, a equação* $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ *admite infinitas soluções.*

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 1.5.8 *No tetraedro OABC, determine m de modo que* $X = O + m\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}}{3}-\overrightarrow{OB}+\dfrac{\overrightarrow{OC}}{2}\right)$ *pertença ao plano ABC.*

Solução: Seja $OABC$ o tetraedro como na Figura 1.27.

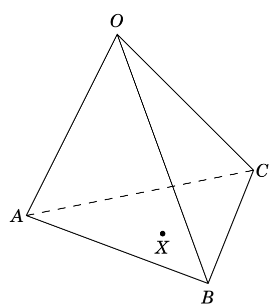

Figura 1.27: Ilustração do tetraedro $OABC$ utilizado no Exemplo 1.5.8.

Assim, dizer que X pertence ao plano ABC é equivalente a dizer que o conjunto de vetores $\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ é LI e, por isso,

$$\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

admite infinitas soluções. Temos que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ e, além disso,

$$X = O + m\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{3} - \overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OX} = m\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{3} - \overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{2}\right),$$

segue que

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + m\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{3} - \overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{2}\right) = \left(\frac{m}{3} - 1\right)\overrightarrow{OA} + (-m)\overrightarrow{OB} + \frac{m}{2}\overrightarrow{OC}.$$

Assim,

$$\begin{gathered}\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha\left[\left(\frac{m}{3} - 1\right)\overrightarrow{OA} + (-m)\overrightarrow{OB} + \frac{m}{2}\overrightarrow{OC}\right] + \beta\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\left(\frac{m}{3} - 1\right)\alpha - \beta - \gamma\right)\overrightarrow{OA} + \left(-m\alpha + \beta\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{m}{2}\alpha + \gamma\right)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.\end{gathered}$$

Dessa forma, como $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ formam um conjunto LI (visto que A, B e C não são pontos colineares), e como $\alpha\overrightarrow{AX} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ possui infinitas soluções, podemos supor que $\alpha \neq 0$. Assim, segue que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left(\frac{m}{3} - 1\right)\alpha - \beta - \gamma & = & 0 \\ -m\alpha + \beta & = & 0 \\ \frac{m}{2}\alpha + \gamma & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\beta & = & m\alpha \\ \gamma & = & -\frac{m}{2}\alpha \\ \left(\frac{m}{3} - 1\right)\alpha - m\alpha + \frac{m}{2}\alpha & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{3} - m + \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow 2m - 6m + 3m = 6 \Rightarrow m = -6.$$

Portanto, a identidade é verdadeira se $m = -6$. ■

Exemplo 1.5.9 *Num triângulo ABC, temos que M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é um ponto de $\overline{AC}$. Sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, prove que N é o ponto médio de $\overline{AC}$.*

Solução: Seja ABC um triângulo com M sendo o ponto médio de $\overline{AB}$ e N sendo um ponto de $\overline{AC}$, como visto na Figura 1.28.

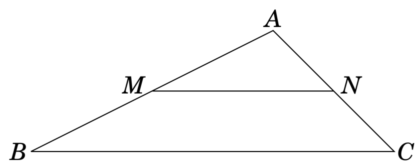

Figura 1.28: Ilustração do triângulo ABC utilizado no Exemplo 1.5.9.

Assim, como $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, segue que $\overline{MN} = \alpha\overline{BC}$ e, sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, segue que $\overline{AB} = 2\overline{MN}$ e, por isso,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \alpha\overline{BC}.$$

Por outro lado, como $C \in \overline{AC}$, segue que $\overline{AN} = \beta\overline{AC}$ e, dessa forma, segue que

$$\overline{AN} = \beta\overline{AC} = \beta\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).$$

Daí, temos que

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \alpha\overline{BC} = \beta\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}$$

e, por isso,

$$\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\overrightarrow{AB} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Como $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ é um conjunto LI, segue que $\frac{1}{2} - \beta = 0 = \alpha - \beta$ e, consequentemente, $\beta = \frac{1}{2}$. Portanto, N é o ponto médio de $\overline{AC}$. ■

Exemplo 1.5.10 *No trapézio $ABCD$ da Figura 1.29, sabemos que o comprimento de $\overline{AB}$ é o dobro do comprimento de $\overline{CD}$. Encontre uma expressão para $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.*

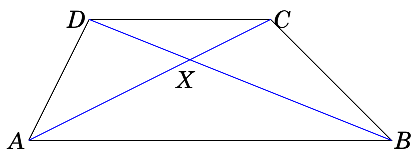

Figura 1.29: Ilustração do trapézio $ABCD$ utilizado no Exemplo 1.5.10.

Solução: Da Figura 1.29 temos que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \text{ e } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC}.$$

Assim, como $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, segue que

$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC} \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{XC}.$$

Por outro lado, como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, segue que os triângulos ABX e CDX são semelhantes, pelo caso AAA. Assim,

$$\frac{\left\|\overline{CD}\right\|}{\left\|\overline{AB}\right\|} = \frac{\left\|\overline{CX}\right\|}{\left\|\overline{AX}\right\|} \Rightarrow \frac{\left\|\overline{CD}\right\|}{2\left\|\overline{CD}\right\|} = \frac{\left\|\overline{CX}\right\|}{\left\|\overline{AX}\right\|} \Rightarrow \left\|\overline{CX}\right\| = \frac{\left\|\overline{AX}\right\|}{2}.$$

Consequentemente, os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AX}$ são de mesmo sentido e o primeiro tem o dobro do comprimento do segundo e, por isso, $\overrightarrow{CX} = \dfrac{\overrightarrow{AX}}{2}$. Daí

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{XC} \Rightarrow \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AX} + \frac{\overrightarrow{AX}}{2} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AX} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

■

Agora vamos falar de separação dos pontos de um plano por uma reta.

Definição 1.5.5 *Sejam π um plano, $r \subset \pi$ uma reta e $P, Q \in \pi \setminus r$ dois pontos distintos. Assim, dizemos que r separa P e Q se $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$.*

Observação 1.5.5 *Dizer que uma reta r separa os pontos P e Q é o mesmo que dizer que os pontos P e Q estão em semiplanos distintos determinados pela reta r. Caso contrário eles estão no mesmo semiplano, como visto na Figura 1.30.*

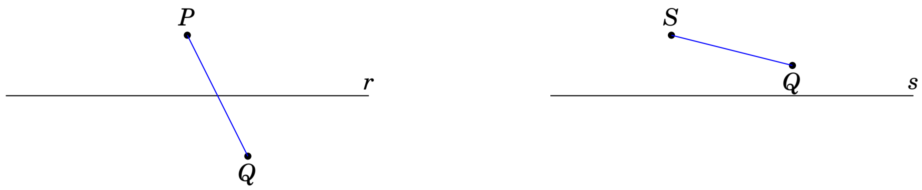

Figura 1.30: Ilustração da separação, ou não, de pontos por uma reta.

Observe que em (a) a reta r separa os pontos P e Q, visto que $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$. Por outro lado, em (b) a reta s não separa os pontos S e T, visto que $\overline{ST} \cap s = \emptyset$.

Agora vamos introduzir Bases, para estabelecermos uma relação entre vetores e coordenadas, o que será feito na próxima seção.

Definição 1.5.6 *Uma sequência ordenada LI de vetores $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ é uma Base para o espaço n-dimensional.*

Exemplo 1.5.11 *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ a sequência ordenada LI, dados na Figura 1.31.*

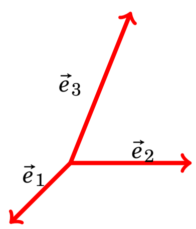

Figura 1.31: Ilustração de uma base no espaço euclidiano.

Então, temos que E é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.5.6 *Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base para o $\mathbb{R}^3$, segue que todo vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos de E e, por isso, existem escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Além disso, do Exemplo 1.5.6 temos que se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base para o $\mathbb{R}^3$, então, o terno de escalares $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ é único em relação a base E.

Definição 1.5.7 *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base para o $\mathbb{R}^3$, então, o único terno ordenado de números reais (a_1, a_2, a_3) que representa $\vec{u}$ como sendo uma combinação linear dos elementos de E é dito ser às Coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base E. Notação: $(a_1, a_2, a_3)_E$.*

Observação 1.5.7 *Apesar de estarmos fazendo toda a construção para base no espaço tridimensionais, as mesmas definições e propriedades podem ser adaptadas para espaços de quaisquer dimensões, mas essas adaptações não serão feitas nessas notas.*

Proposição 1.5.6 *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base para o $\mathbb{R}^3$. Assim, se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, temos que:*

a) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E$;

b) $\alpha\vec{u} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)_E$.

Demonstração: Exercício. ∎

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.5.12 *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base para o $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$, calcule $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$.*

Solução: Como $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$, segue que $-3\vec{u} = -3(a_1, a_2, a_3)_E = (-3a_1, -3a_2, -3a_3)_E$. Da mesma forma, como $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$, segue que $2\vec{v} = 2(b_1, b_2, b_3)_E = (2b_1, 2b_2, 2b_3)_E$. Assim,

$$\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = (-3a_1, -3a_2, -3a_3)_E + (2b_1, 2b_2, 2b_3)_E =$$

$$= (-3a_1 + 2b_1, -3a_2 + 2b_2, -3a_3 + 2b_3)_E.$$

∎

Exemplo 1.5.13 *Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como uma combinação linear de $\vec{u} = (1, -1, 3)_E$, $\vec{v} = (2, 1, 3)_E$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)_E$.*

Solução: Queremos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Assim,

$$\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \Rightarrow (4, 0, 13) = \alpha(1, -1, 3) + \beta(2, 1, 3) + \gamma(-1, -1, 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 4 \\ -\alpha+\beta-\gamma & = & 0 \\ 3\alpha+3\beta+4\gamma & = & 13 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 4 \\ 3\beta-2\gamma & = & 4 \\ 3\beta-7\gamma & = & -1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 4 \\ 3\beta-2\gamma & = & 4 \\ 5\gamma & = & 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 4 \\ 3\beta-2\gamma & = & 4 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 4 \\ 3\beta\gamma & = & 6 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+2\beta & = & 5 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right. .$$

Portanto, $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$. ■

Proposição 1.5.7 *Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)_E$ dois vetores do plano. Então, temos que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração: Temos que podemos considerar que $\alpha \neq 0$ pois, caso contrário, $\vec{u} = 0$, e não há mais nada a fazer, visto que qualquer conjunto que contém o vetor nulo é LD. Assim,

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ é } LD \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow a_1 = \alpha b_1 \text{ e } a_2 = \alpha b_2.$$

Consequentemente,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1\alpha b_2 - a_2\alpha b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 - a_2a_1 = 0,$$

o que é sempre verdade. Portanto, o resultado é válido. ■

Proposição 1.5.8 *Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (b_1, b_2)_E$ e $\vec{w} =$ três vetores do espaço. Então, temos que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração: Exercício. ■

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.5.14 *Verifique se os vetores a seguir formam, ou não, um conjunto LI.*

a) $\vec{u} = (3, 10)$ *e* $\vec{v} = (4, 7)_E$;

b) $\vec{u} = (3, 21)$ *e* $\vec{v} = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)_E$;

c) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)_E$ *e* $\vec{w} = (4, -3, 11)$;

d) $\vec{u} = (1,0,0)$*,* $\vec{v} = (200,2,1)_E$ *e* $\vec{w} = (300,1,2)$*.*

Solução:

a) Como $\vec{u} = (3,10)$ e $\vec{v} = (4,7)_E$, segue que

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 10.4 = 21 - 40 = -19 \neq 0$$

e, por isso, temos que $(\vec{u},\vec{v})$ é um conjunto LI.

b) Como $\vec{u} = (3,21)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)_E$, segue que

$$\begin{vmatrix} 3 & 21 \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{vmatrix} = 3.\frac{7}{5} - 21.\frac{1}{5} = \frac{21}{5} - \frac{21}{5} = 0$$

e, por isso, temos que $(\vec{u},\vec{v})$ é um conjunto LD.

c) Como $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,1,3)_E$ e $\vec{w} = (4,-3,11)$, segue que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 1.1.11 + (-1).3.4 + 0.(-3).2 - 4.1.2 - 0.(-1).11 - (-3).3.1 =$$

e, por isso, temos que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é um conjunto LD.

d) Como $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (200,2,1)_E$ e $\vec{w} = (300,1,2)$, segue que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 200 & 2 & 1 \\ 300 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 1.1 = 3 \neq 0$$

e, por isso, temos que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é um conjunto LI.

■

Exemplo 1.5.15 *Sabendo que* $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *uma base para o* $\mathbb{R}^3$*, e que*

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad e \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3,$$

a) Mostre que $F = \left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ *é uma base para o* $\mathbb{R}^3$*;*

b) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{v}$ *em relação a base F, sabendo que* $\vec{v} = (1,1,1)_E$*.*

Solução:

a) Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Assim, para que $F=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ formem uma base para o $\mathbb{R}^3$ é preciso mostrar que eles são LI. Daí,

$$\alpha\vec{f}_1+\beta\vec{f}_2+\gamma\vec{f}_3=\alpha(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)+\beta(\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3)+\gamma(\vec{e}_1+2\vec{e}_3)=$$

$$=\left(2\alpha+\beta+\gamma\right)\vec{e}_1+\left(-\alpha-\beta\right)\vec{e}_2+\left(2\beta+2\gamma\right)\vec{e}_3.$$

Como $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, segue que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é um conjunto LI e, por isso, temos que

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha+\beta+\gamma & = & 0\\ -\alpha-\beta & = & 0\\ 2\beta+2\gamma & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Portanto, $F=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ é um conjunto LI e, consequentemente, $F=\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\right)$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

b) Temos que

$$\vec{v}=\alpha\vec{f}_1+\beta\vec{f}_2+\gamma\vec{f}_3=\alpha(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)+\beta(\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3)+\gamma(\vec{e}_1+2\vec{e}_3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1,1,1)_E=\left(2\alpha+\beta+\gamma\right)\vec{e}_1+\left(-\alpha-\beta\right)\vec{e}_2+\left(2\beta+2\gamma\right)\vec{e}_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha+\beta+\gamma & = & 1\\ -\alpha-\beta & = & 1\\ 2\beta+2\gamma & = & 1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha+\beta+\gamma & = & 1\\ \alpha & = & -\beta-1\\ \gamma & = & \frac{1}{2}-\beta\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(-\beta-1\right)+\beta+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)=1\Rightarrow 2\beta=-2+\frac{1}{2}-1=\frac{-5}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=-\frac{5}{4},\ \alpha=-\left(-\frac{5}{4}\right)-1=\frac{1}{4}\text{ e }\gamma=\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{4}.$$

Portanto, $\vec{v}=\left(\frac{1}{4},-\frac{-5}{4},\frac{7}{4}\right)_F$.

■

Definição 1.5.8 *Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de Ortogonais, e escrevemos $\vec{u}\perp\vec{v}$, se as retas que contém esses vetores são ortogonais.*

Observação 1.5.8 *Por definição, o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.*

Proposição 1.5.9 *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se,*

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2.$$

Demonstração: Exercício. ■

Definição 1.5.9 *Uma base $E=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n)$ do $\mathbb{R}^n$ é dita ser Ortogonal se os vetores da base são dois a dois ortogonais.*

Definição 1.5.10 *Uma base ortogonal $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ do $\mathbb{R}^n$ é dita ser Ortonormal se os vetores da base são todos unitários.*

Proposição 1.5.10 *Seja $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$. Assim, se $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$, então, temos que*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 1.5.16 *Seja E uma base ortonormal e $\vec{u} = (2, -1, 3)_E$. Calcule $||\vec{u}||$.*

Solução: Temos que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

■

Agora, faça alguns exercícios.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1 *Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Mostre que*

a) P, A e B são colineares se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD.

b) P, A, B e C são coplanares se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

Exercício 1.6.2 *Prove que se $\vec{u}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$, então, qualquer combinação linear de vetores que contenha $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é LD.*

Exercício 1.6.3 *Prove que toda sequência que contenha o vetor nulo é LD.*

Exercício 1.6.4 *Mostre que*

a) $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD $\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.

b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI $\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ é LI.

c) $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD $\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LD.

Exercício 1.6.5 *Prove que para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, a sequência $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, sabendo que*

a) $\vec{a} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = -\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v} + \dfrac{3}{4}\vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} + \dfrac{1}{2}\vec{w}$;

b) $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$;

c) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}$.

Exercício 1.6.6 *Mostre que se* $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\cdots+\beta_n\vec{v}_n$ *implica em* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_n = \beta_n$*, então,* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ *é um conjunto* LI.

Exercício 1.6.7 *Num triângulo ABC, sabendo que M é o ponto médio de* $\overline{AB}$ *e que N é o ponto médio de* $\overline{AC}$*, mostre que* $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$ *e que* $\left\|\overline{NM}\right\| \parallel \dfrac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\|$.

Exercício 1.6.8 *Sabendo que* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *uma base para o* $\mathbb{R}^3$*, e que*

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad e \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3,$$

mostre que $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ *é uma base para o* $\mathbb{R}^3$ *e escreva* $\vec{u} = (2,1,3)_E$ *na base* F.

Exercício 1.6.9 *Sabendo que* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *uma base para o* $\mathbb{R}^3$*, e que*

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \quad e \quad \vec{f}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3,$$

encontre condições para os escalares a, b *e* C *para que* $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ *seja uma base para o* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 1.6.10 *Seja* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *uma base para o* $\mathbb{R}^3$*. Calcule* $\|\vec{u}\|$*, sabendo que*

a) $\vec{u} = (1,1,-1)_E$;

b) $\vec{u} = (1,2,3)_E$;

c) $\vec{u} = (0,-1,3)_E$;

d) $\vec{u} = (-2,2,-2)_E$;

e) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$;

f) $\vec{u} = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

g) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$;

h) $\vec{u} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$;

i) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

j) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.