Capítulo 1

Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Nesse capítulo será feito um estudo das *Funções reais de n variáveis reais*, semelhante ao estudo feito no Cálculo de funções reais de uma variável real (*Cálculo Diferencial e Integral 1*). Para isso, na Seção 1.1 é apresentado uma revisão do espaço euclidiano n-dimensional e suas propriedades, na Seção 1.3 é apresentado a definição de funções reais de várias variáveis reais, alguns exemplos e algumas propriedades. Na Seção 1.5 é feito o estudo do limite e na Seção 1.7 é estudado a Continuidade de funções reais de várias variáveis reais. Na Seção 1.9 é apresentado o conceito de derivadas parciais e na Seção 1.11 o estudo de diferenciabilidade. A Regra da Cadeia é apresentada na Seção 1.13 e na Seção 1.15 é visto os conceitos de Derivada Direcional. Na Seção 1.17 é apresentado o Gradiente de funções reais de duas variáveis, na Seção 1.19 o Plano Tangente e o Plano Normal a uma superfície e na Seção 1.21 o estudo das Derivadas Parciais de Ordem Superior. Na Seção é introduzido um estudo de Máximos e Mínimos de funções reais de várias variáveis e na Seção 1.23, apresentado os Multiplicadores de Lagrange. Por fim, na Seção **??** é apresentada a Fórmula de Taylor e algumas aplicações e na Seção **??** é apresentado o Teorema da Função Implícita. Vamos ao conceito de funções reais de várias variáveis.

1.1 O Espaço Euclidiano n-Dimensional

No estudo de funções no curso de cálculo 1, são trabalhado os conceitos envolvendo funções reais de uma única variável real. Contudo, em geral, nas situações práticas as funções dependem de várias variáveis. Veja alguns exemplos.

Exemplo 1.1.1 *a) A área total de um cilindro circular reto ou o volume de um cone, depende do raio da base e da altura;*

b) A demanda de uma mercadoria depende do preço de venda, do preço de seus similares, da renda média do consumidor, da época de lançamento, do investimento em Marketing, etc.;

c) A pressão de um gás depende da sua temperatura e do seu volume;

d) A frequência de um circuito sintonizador depende da sua capacitância, da sua indutância e da sua resistência.

■

A seguir é apresentado a definição do *Espaço n-dimensional* a ser usado no estudo de funções reais de várias variáveis reais.

Definição 1.1.1 *O conjunto de todas as n-uplas de números reais é chamado de **Espaço Numérico** n-**Dimensional** (ou **Espaço Euclidiano** n-**Dimensional**), sendo esse denotado por $\mathbb{R}^n$. Cada n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ do espaço euclidiano n-dimensional é dita ser um **Ponto** desse espaço.*

■

De um modo geral estamos habituados a trabalhar com três espaços euclidianos em particular, como veremos no Exemplo 1.1.2.

Exemplo 1.1.2 *a) Se $n = 1$, então, temos o espaço euclidiano unidimensional. Ele é o conjunto formado por todos os números reais x, ou seja, $\mathbb{R}^1$ é a reta numérica.*

b) Se $n = 2$, então, temos o espaço euclidiano bidimensional. Ele é o conjunto formado por todos os pares ordenados de números reais (x_1, x_2), ou seja, $\mathbb{R}^2$ é o plano cartesiano.

c) Se $n = 3$, então, temos o espaço euclidiano tridimensional. Ele é o conjunto formado por todas as triplas ordenadas de números reais (x_1, x_2, x_3), ou seja, $\mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano.

■

Para interpretações físicas e geométricas futuras, podemos associar uma n-upla $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ do espaço euclidiano n-dimensional como sendo um vetor desse espaço, onde v tem ponto inicial $O = (0, \cdots, 0)$ do sistema de eixo ortonormal. Assim,

$$v = \overrightarrow{OP} = P - O = P = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Associando os pontos do espaço n-dimensional com vetores, as operações para esse espaço ficam bem definidas e algumas dessas operações são apresentadas na Definição 1.1.2.

Definição 1.1.2 *Sejam $v_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ elementos quaisquer do espaço euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Então, definimos as seguintes operações:*

*a) **Soma** de v_1 com v_2:*

$$v_1 \pm v_2 = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \cdots, x_n \pm y_n);$$

*b) **Produto de** v_1 pelo escalar λ:*

$$\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n);$$

*c) **Produto Interno Canônico** (ou **Produto Escalar**) de v_1 por v_2:*

$$v_1 \cdot v_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n;$$

*d) **Distância** (ou **Módulo**) entre v_1 e v_2:*

$$||v_1 - v_2|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2};$$

*e) **Norma Euclidiana** (ou **Comprimento**) de v_1:*

$$||v_1|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

*f) **Ângulo** θ **entre** v_1 **e** v_2:*

$$\cos(\theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1|| \cdot ||v_2||}.$$

■

Para vetores no espaço tridimensional, podemos definir o *Produto Vetorial*, como apresentado a seguir.

Definição 1.1.3 *Sejam $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ e $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. O **Produto Vetorial** de v_1 por v_2, denotado por $v_1 \times v_2$ ou $v_1 \wedge v_2$, é o novo vetor dado por*

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\overrightarrow{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\overrightarrow{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\overrightarrow{k}.$$

■

A seguir são apresentas algumas observações sobre as operações definidas para o $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.1.1 *a) $||\cdot||$ representa um número não-negativo;*

b) Em $\mathbb{R}$, $||\cdot||$ equivale ao $|\cdot|$ (módulo), ou seja, a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre esses dois números reais.

c) Em $\mathbb{R}^2$, $||P - A|| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, onde $P = (x, y)$ e $A = (a, b)$.

d) Em $\mathbb{R}^3$, $||P - A|| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, onde $P = (x, y, z)$ e $A = (a, b, c)$.

e) Existem outras tipos de produtos internos e normas que podem ser utilizadas no estudo de matemática. Caso necessitemos de uma dessas, a mesma será definida no momento apropriado.

f) O produto vetorial é uma operação orientada, ou seja, a ordem dos vetores no produto são relevantes, visto que $v_1 \times v_2 = -v_2 \times v_1$.

g) $v_1 \times v_2$ *é ortogonal a* v_1 *e a* v_2*, visto que*

$$v_1 \cdot (v_1 \times v_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } v_2 \cdot (v_1 \times v_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Podemos verificar facilmente que o $\mathbb{R}^n$, com as operações de soma e produto pelo escalar definidas anteriormente, é um espaço vetorial (Exercício). Agora que já conhecemos uma forma de calcular distâncias no $\mathbb{R}^n$, podemos definir o que chamaremos de *Bolas* no espaço n-dimensional.

Definição 1.1.4 *Se A é um ponto no $\mathbb{R}^n$ e r é um número positivo, então, a* ***Bola Aberta*** *$B(A; r)$ de centro em A e raio r, é definida como sendo o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^n$ tais que $||P - A|| < r$.*

■

Definição 1.1.5 *Se A é um ponto no $\mathbb{R}^n$ e r é um número positivo, então, a* ***Bola Fechada*** *$B[A; r]$ de centro em A e raio r, é definida como sendo o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^n$ tais que $||P - A|| \leq r$.*

■

Observação 1.1.2 *a) Em $\mathbb{R}$, a bola aberta $B(a, r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$ e a bola fechada $B[a, r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$.*

b) Em $\mathbb{R}^2$, se $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, então, a bola aberta $B(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r,$$

ou seja, é a parte interna do círculo delimitado pela circunferência de centro A e raio r, como visto na Figura 1.1. Por outro lado, a bola fechada $B[A, r]$ é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r$, ou seja, é a união da parte interna do círculo delimitado pela circunferência de centro A e raio r e a sua fronteira, como visto na Figura 1.2.

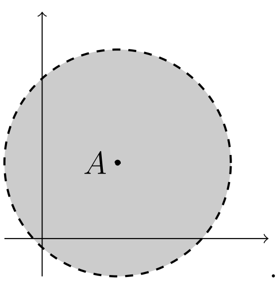

Figura 1.1: Representação de uma bola aberta no $\mathbb{R}^2$.

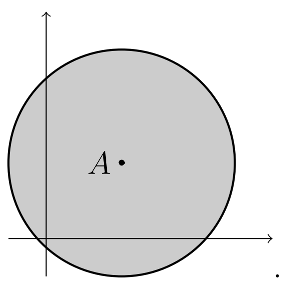

Figura 1.2: Representação de uma bola fechada no $\mathbb{R}^2$.

c) *Em $\mathbb{R}^3$, se $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, então, a bola aberta $B(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que*

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r,$$

ou seja, é a parte interna da esfera de centro A e raio r, como visto na Figura 1.3. Por outro lado, a bola fechada $B[A, r]$ é o conjunto de todos os pontos internos à esfera junto com os pontos da calota, ou seja, é o conjunto formado por todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leq r,$$

como visto na Figura 1.4.

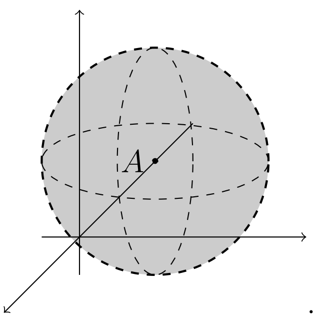

Figura 1.3: Representação de uma bola aberta no $\mathbb{R}^3$.

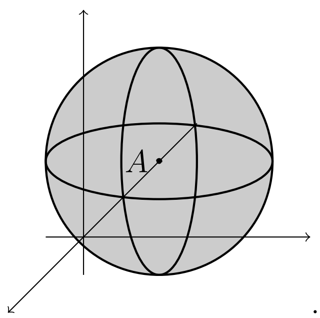

Figura 1.4: Representação de uma bola fechada no $\mathbb{R}^3$.

■

Da Observação 1.1.2 podemos perceber que existem pontos que estão na parte interna de uma bola e outros pontos que estão na sua fronteira. Agora, iremos identificar alguns pontos que possuem características importantes, comecemos com a definição de *Ponto Interior*.

Definição 1.1.6 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Dizemos que $A \in D$ é um Ponto Interior de D, e escrevemos $A \in Int(D)$, se existir uma bola aberta $B(A, \epsilon)$, centrada em A, totalmente contida em D.*

■

Exemplo 1.1.3 *Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$, ou seja, D é o primeiro quadrante do plano cartesiano. Assim, se $x, y > 0$, então, qualquer ponto $A = (x, y)$ é um ponto interior de A.*

De fato: *Seja $2r = \min\{d(A, \text{eixo } x), d(A, \text{eixo } y)\}$. Assim, $B(A, r) \subset D$.* □

Por outro lado, se $x = 0$ ou $y = 0$, então, $A = (x, y)$ não é um ponto interior de D.

De fato: *Se $x = 0$, então, A estará sobre o eixo y e, consequentemente, toda bola centrada em A terá pontos de abscissa negativa. A mesma conclusão chegamos em relação à ordenada se $y = 0$.* □

Observa a Figura 1.5. Nesse exemplo, temos que o ponto A é um ponto interior ao conjunto, enquanto que os pontos B e C estão no conjunto D mas não são pontos interiores de D.

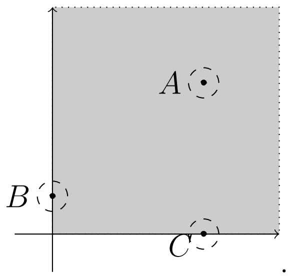

Figura 1.5: Ilustração de pontos internos e não, do conjunto D do Exemplo 1.1.3.

$\blacksquare$

Existe uma ideia mais geral do que a de bolas abertas, como apresentada a seguir.

Definição 1.1.7 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Dizemos que D é um Conjunto Aberto se todos os pontos de D forem pontos interiores de D.* $\blacksquare$

Teorema 1.1.1 *Toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja B uma bola aberta de centro $A \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$. Para mostrar que $B(A, r)$ é um conjunto aberto, precisamos mostrar que qualquer ponto $P \in B$ é o centro de uma bola aberta B_1 que está totalmente contida em B. Para isso, seja

$$\alpha = \min\{||P - A||, r - ||P - A||\}.$$

Afirmação: A Bola $B_1(P, \alpha) \subset B(A, r)$.

De fato: Seja $V \in B_1(P, \alpha)$. Temos que $||V - P|| < \alpha$, visto que $V \in B_1(P, \alpha)$. Assim,

$$||V - A|| = ||V - P + P - A|| \leq ||V - P|| + ||P - A|| < \alpha + ||P - A|| \leq$$

$$\leq r - ||P - A|| + ||P - A|| = r \Rightarrow ||V - P|| < r$$

e, por isso, $V \in B(A, r)$. $\square$

Portanto, $B(A, r)$ é um conjunto aberto. $\blacksquare$

Exemplo 1.1.4 *a) $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, visto que toda bola $B(A, r)$, com $A \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, está contida no $\mathbb{R}^n$.*

b) O conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ não é um conjunto aberto.

De fato: *Temos que $O = (0, 0) \in D$. Contudo, toda bola $B(O, r)$, com $r > 0$, possui pontos de abscissa negativa e, por isso, $B(O, r) \not\subset D$. Portanto, S não é um conjunto aberto.* □

c) O conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ é um conjunto aberto.

De fato: *Seja $P \in D$ e considere $r = \min\{d(P, \overrightarrow{OX}), d(P, \overrightarrow{OY})\}$. Dessa forma, temos que a bola $B(P, r) \subset D$, para todo P, e, por isso, esse conjunto é aberto.* □

■

Definição 1.1.8 *Dizemos que um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um **Ponto de Acumulação** de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se toda bola aberta $B(P, r)$ contiver uma infinidade de pontos de D.*

■

Exemplo 1.1.5 *Considere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$. Assim, temos que:*

- *Todo ponto $P \in D$ é um ponto de acumulação de D, visto que toda bola aberta $B(P, r)$ possui infinitos pontos de D.*
- *Todo ponto de abscissa ou ordenada nula é um ponto de acumulação de D, visto que toda bola aberta $B(P, r)$ possui infinitos pontos de D.*
- *O ponto $P = (-1, 2)$ não é um ponto de acumulação de D.*

  De fato: *Observe que $B\left(P, \dfrac{1}{2}\right) \cap D = \varnothing$ e, por isso, P não é um ponto de acumulação de D.* □

■

Exemplo 1.1.6 *Seja D o conjunto de todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ do lado positivo do eixo das abscissas. Assim, temos que a origem é um ponto de acumulação de D pois, para todo $r \in \mathbb{R}$, por menor que seja, o disco aberto de centro na origem e de raio r contém infinitos pontos de D. Esse exemplo mostra que um ponto de acumulação não precisa ser um elemento do conjunto. Além disso, nesse exemplo, qualquer ponto de conjunto D é um ponto de acumulação de D.*

■

Exemplo 1.1.7 *Se D é o conjunto de todos os pontos no $\mathbb{R}^2$ para os quais as coordenadas cartesianas são números inteiros positivos, então, esse conjunto não possui ponto de acumulação.*

De fato: *Seja $A = (m, n)$ um ponto de D. Assim, tomando $r = \frac{1}{2}$ temos que a bola $B(A, r)$ não contém nenhum outro ponto de S diferente de A.* $\square$

$\blacksquare$

Agora faça alguns exercícios par fixar o conteúdo.

1.2 Exercícios

Exercício 1.2.1 *Mostre que o espaço euclidiano n-dimensional, com as operações de soma e produto por escalar é um espaço vetorial.*

Exercício 1.2.2 *Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e que seja paralela à direção do vetor $v = (-1, 1)$.*

Exercício 1.2.3 *Determine um vetor que tenha direção paralela a cada um das retas a seguir:*

a) $3x + 2y = 2$; *c)* $x + 3y = 2$;

b) $2x + y = 1$; *d)* $3x - y = 3$.

Exercício 1.2.4 *Determine um vetor que tenha direção ortogonal a cada um das retas a seguir:*

a) $x - 2y = 3$; *c)* $x + y = 1$;

b) $2x - 5y = 4$; *d)* $x + 2y = 3$.

Exercício 1.2.5 *Determine uma equação da reta que passa pelo ponto P dado e que tenha direção paralela à reta r dada.*

a) $P = (2, -5)$ *e* $r : x - y = 1$; *c)* $P = (1, -2)$ *e* $r : 2x + y = 3$;

b) $P = (-1, 2)$ *e* $r : 2x + 3y = 4$; *d)* $P = (0, -3)$ *e* $r : -2x + y = 5$.

Exercício 1.2.6 *Determine uma equação da reta que passa pelo ponto P dado e que tenha direção ortogonal à reta r dada.*

a) $P = (1, 2)$ *e* $r : 2x + y = 3$; *c)* $P = (-3, -2)$ *e* $r : x - y = -2$;

b) $P = (2, -2)$ *e* $r : x + 3y = 1$; *d)* $P = (2, 0)$ *e* $r : 4x - 3y = -3$.

Exercício 1.2.7 *Determine um vetor não nulo que seja ortogonal aos vetores u e v dados.*

a) $u = (1, 2, -1)$ *e* $v = (2, 1, 2)$; *c)* $u = (-3, -1, 4)$ *e* $v = (0, 1, 3)$;

b) $u = (3, 2, -1)$ *e* $v = (-1, 2, 1)$; *d)* $u = (0, 0, 1)$ *e* $v = (0, 1, 0)$.

Exercício 1.2.8 *Determine uma equação do plano que passa pelo ponto P dado e que seja paralelo aos vetores u e v dados.*

a) $P = (1, 2, 1)$, $u = (-1, 1, 2)$ *e* $v = (2, 1, -1)$;

b) $P = (1, -2, -2)$, $u = (0, 1, -2)$ *e* $v = (2, 0, 1)$;

c) $P = (-1, -2, 3)$, $u = (1, -3, -2)$ *e* $v = (1, 1, 1)$;

d) $P = (2, -2, 4)$, $u = (1, 0, 0)$ *e* $v = (0, 1, 0)$.

Exercício 1.2.9 *Calcule a norma de cada um dos vetores a seguir*

a) $u = (1, 2)$;

b) $v = (2, 1, 3)$;

c) $w = (-3, 4)$;

d) $u = (0, 1, 2)$;

e) $v = (0, 0, 1)$;

f) $w = (-1, 2, 1)$.

Exercício 1.2.10 *Sejam* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *dois vetores quaisquer. Mostre que vale a desigualdade triangular, ou seja,*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Exercício 1.2.11 *Sejam* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *dois vetores quaisquer. Mostre que vale a propriedade*

$$||u - v|| \geq |||u|| - ||v||| \,.$$

Exercício 1.2.12 *Sejam* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *dois vetores quaisquer. Mostre que vale a propriedade*

$$||u - v|| \geq |u_i - v_i| \,, \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Exercício 1.2.13 *Verifique se cada um dos conjuntos abaixo são conjuntos abertos em* $\mathbb{R}^2$.

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 1\}$;

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1 \text{ e } 1 < y < 3\}$;

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + y > 3\}$;

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + y^2 < 0\}$;

f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$.

Exercício 1.2.14 *Determine o conjunto dos pontos de acumulação de cada um dos conjuntos a seguir.*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$;

c) $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1 \right); n \in \mathbb{N} \right\}$;

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 1\}$;

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1 \text{ e } 1 < y < 2\}$;

f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Exercício 1.2.15 *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é um conjunto fechado se o conjunto $A = \mathbb{R}^n \setminus F$ for aberto. Verifique quais dos conjuntos a seguir são fechados.*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 2\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 5\}$;

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$;

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + 2y \geq -2\}$;

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$.

Exercício 1.2.16 *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$. Sabendo que B não é um conjunto aberto podemos afirmar que ele não é fechado? Por que?*

Exercício 1.2.17 *Sejam A e B conjuntos abertos e F e G conjuntos fechados. Mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ são conjuntos abertos e $F \cap G$ e $F \cup G$ são conjuntos fechados.*