3.3 Operações com Limites

Nessa seção serão estudados os teoremas que permitem cálculos envolvendo sequências.

Teorema 3.3.1 *Se $x_n \to 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então,*

$$\lim x_n \cdot y_n = 0.$$

Demonstração: Como (y_n) é uma sequência limitada, segue que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|y_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda, como $x_n \to 0$, segue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $|x_n| < \dfrac{\epsilon}{k}$. Assim, para todo $n > n_0$ temos que

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot k < \frac{\epsilon}{k} \cdot k = \epsilon.$$

Portanto, $x_n \cdot y_n \to 0$. ■

Exemplo 3.3.1 *a) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = sen\,(n)$. Assim, como $x_n \to 0$ e $|y_n| \leq 1$, segue que*

$$\lim \frac{sen\,(n)}{n} = \lim \frac{1}{n} \cdot sen\,(n) = 0.$$

b) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $y_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como $x_n \to 0$ e $|y_n| \leq 1$, segue que

$$\lim \frac{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2} = \lim \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

■

Vamos a algumas observações.

Observação 3.3.1 *a) É importante ressaltar que o fato de uma das sequências ser limitada é indispensável. Por exemplo, se $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = n^2$, temos que $x_n \cdot y_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $x_n \cdot y_n \to +\infty$.*

b) Para uso posterior, observe que valem as equivalências:

$$x_n \to a \Leftrightarrow (x_n - a) \to 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

c) Se $x_n \to b$, com $b \neq 0$, então para n suficientemente grande temos que $x_n \neq 0$.

De fato: *Como $b \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $b - \epsilon > 0$. Assim, para esse ϵ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos que $x_n \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$ e, por isso, $x_n \neq 0$, para todo n suficientemente grande.* □

Vamos estabelecer as operações com limites.

Teorema 3.3.2 *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $x_n \to a$ e $y_n \to b$, então:*

a) $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$;

b) $\lim (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

c) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração:

a) Façamos para a adição. Seja $\epsilon > 0$. Então, como $x_n \to a$ e $y_n \to b$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n > n_1$, então, $|x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e, analogamente, se $n > n_2$, então, $|y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim, tomando $n_o = \max\{n_1, n_2\}$, temos que se $n > n_0$, então,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $(x_n + y_n) \to (a + b)$. O caso para a subtração sai de maneira análoga.

b) Temos que

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b = x_n(y_n - b) + b(x_n - a).$$

Logo, como $x_n \to a$, segue do Teorema 3.1.3 que a sequência (x_n) é limitada. Além disso, como $\lim(x_n - a) = \lim(y_n - b) = 0$, segue do Teorema 3.3.1 que $\lim x_n(y_n - b) = \lim b(x_n - a) = 0$ e, por consequência, $(x_n \cdot y_n) \to (a \cdot b)$.

c) Temos que

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - a y_n}{y_n b}.$$

Assim, temos que $\lim x_n b - a y_n = ab - ab = 0$. Logo, se a sequência $\left(\dfrac{1}{y_n b}\right)$ for limitada, segue do Teorema 3.3.1 que $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right) = 0$.

Para isso, seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \dfrac{b^2}{2}$. Assim, $0 < c < b^2$ e como $\lim y_n b = b^2$, segue do Teorema 3.2.1 que existe um n suficientemente grande tal que $c < y_n b$ e, consequentemente, $\dfrac{1}{y_n b} < \dfrac{1}{c}$, ou seja, a sequência $\left(\dfrac{1}{y_n b}\right)$ é limitada, completando a demonstração.

$\blacksquare$

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.2 *Mostre que se* $x_n > 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, e se* $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$*, então,* $\lim x_n = 0$.

Solução: Considere um número real c tal que $a < c < 1$. Assim, para todo n suficientemente grande, temos que

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c.$$

Daí,

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} x_n < c x_n < x_n,$$

ou seja, a sequência é monótona e limitada e, por isso, convergente. Seja $\lim x_n = b$, onde $b \geq 0$. Tomando o limite da desigualdade $x_{n+1} < cx_n$ quando $n \to +\infty$, segue que

$$b \leq cb \Rightarrow 0 \leq (1-c)b \leq 0 \Rightarrow b = 0,$$

visto que $1 - c > 0$. Portanto, $\lim x_n = 0$. ■

Exemplo 3.3.3 *Seja $0 < a < 1$. A sequência cujo termo geral é $x_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ é crescente, visto que cada termo é o anterior somado a um número positivo. Essa sequência também é limitada, visto que $x_n < \dfrac{1}{1-a}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que*

$$\lim x_n = \lim(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \lim\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) = \frac{1}{1-a}.$$

■

Utilizando a ideia do Exemplo 3.3.3, segue que se $x_n = a + a^2 + \cdots + a^n$, então, $x_n \to \dfrac{a}{1-a}$.

Exemplo 3.3.4 *A sequência cujo termo geral é*

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

é crescente, pois cada termo é o anterior somado a um número positivo. Além disso, como

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n = n!,$$

segue que $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^n}$ e, consequentemente, como

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

temos que

$$2 < a_n \leq 3,$$

ou seja, a sequência gerada por a_n é limitada e, portanto, convergente. O valor do limite dessa sequência é o Número de Euler, denotado por e. Temos que $e \approx 2,7182$.

■

Exemplo 3.3.5 *Considere a sequência cujo termo geral é dado por* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. *Usando binômios de Newton, temos que:*

$$b_n = \binom{n}{0} 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots +$$

$$+\binom{n}{n-1} 1^1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)(\cdots)\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Como b_n *é uma soma de parcelas positivas, segue que* $b_n \geq 0$. *Além disso, segue que a sequência formada por* b_n *é crescente. Do Exemplo 3.3.4 temos que* $b_n < 3$, *visto que* $b_n \leq a_n$, *para todo* n.
Fixe um número $p \in \mathbb{N}$. *Assim, se* $n > p$, *temos que*

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)(\cdots)\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

Fazendo $n \to +\infty$, *segue que*

$$\lim b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!} = a_p.$$

Como essa desigualdade vale para todo $p \in \mathbb{N}$, *segue que* $\lim b_n \geq \lim a_n = e$. *Como* $b_n \leq a_n$, *então,* $\lim b_n \leq \lim a_n = e$ *e, consequentemente,* $\lim b_n = e$.

Exemplo 3.3.6 *Mostre que se* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a > 1$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *são duas constantes, então,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Solução: Considere $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. Assim, $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo x_{n+1}/x_n, obtemos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} < 1$, visto que $a > 1$, segue do Exemplo 3.3.2 que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Agora, considere $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Assim, $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo x_{n+1}/x_n, obtemos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, visto que $a > 1$, segue do Exemplo 3.3.2 que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Por fim, considere $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Assim, $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo x_{n+1}/x_n, obtemos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ (Exemplo 3.3.5), segue do Exemplo 3.3.2 que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

■

Exemplo 3.3.7 *Mostre que dado $a > 0$, tomando $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, então, temos que $x_n \to 1$.*

Solução: Se $a > 1$, como $n+1 > n \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, segue que $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$ e, consequentemente, x_n é uma sequência monótona decrescente. Além disso, como $0 < a^{\frac{1}{n}} \leq a^1$, segue que x_n é uma sequência também limitada e, por isso, convergente. Seja $\lim x_n = L$. Então, segue do Teorema 3.1.2 que qualquer subsequência sua também converge para L. Daí, tome a subsequência dada por $x_k = a^{\frac{1}{k(k+1)}}$.
Como

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

segue que

$$x_k = a^{\frac{1}{k(k+1)}} = a^{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} = \frac{a^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k+1}}}$$

E, consequentemente, segue que

$$\lim x_n = \lim \frac{a^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{\lim a^{\frac{1}{k}}}{\lim a^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{L}{L} = 1.$$

Portanto, $x_n \to 1$. ■

Exemplo 3.3.8 *Mostre que a sequência* (x_n) *tal que* $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ *convergem para* 1.

Solução: Temos que $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ é maior do que 1. Além disso, como

$$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

que é verdade para todo $n \geq 3$ (Exemplo 3.3.5), segue que a sequência definida por x_n é limitada e decrescente e, por isso, convergente. Seja $L = \lim x_n$. Assim, temos que $L \geq 1$, visto que $x_n > 1$.
Agora, considere a subsequência $(2n)^{\frac{1}{2n}}$. Daí,

$$L^2 = \lim \left[(2n)^{\frac{1}{2n}}\right]^2 = \lim \left[2^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}\right] = 1 \cdot L = L.$$

Portanto, como $L \neq 0$ e $L^2 = L$, segue que $L = 1$ e, consequentemente, segue que $\sqrt[n]{n} \to 1$. ■

Exemplo 3.3.9 ***(Aproximações Sucessivas da Raiz Quadrada)****: O método a seguir vem sendo utilizado para obter um valor aproximado para a raiz quadrada de qualquer número real positivo:*

"Considere um número real $x_1 > \sqrt{a}$*. Assim, para cada* $n > 1$ *obtenha de forma iterativa o valor de* x_{n+1} *por:*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

Assim, essa sequência converge para $\sqrt{a}$*."*

Solução: Primeiro mostremos que a sequência definida por x_n é limitada. Para isso, observe que para qualquer número real x satisfazendo $x > \sqrt{a}$ nos leva a

$$x\sqrt{a} > \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \Rightarrow x\sqrt{a} > a \Rightarrow \sqrt{a} > \frac{a}{x} \Rightarrow x > \sqrt{a} > \frac{a}{x}.$$

Por outro lado, considere $y = \dfrac{x + \dfrac{a}{x}}{2}$, ou seja, y é a média aritmética dos números x e $\dfrac{a}{x}$ e como $x > \dfrac{a}{x}$, segue que $\dfrac{a}{x} < y < x$. Por outro lado, $\sqrt{x \cdot \dfrac{a}{x}} = \sqrt{a}$ e, consequentemente, a média geométrica dos números x e $\dfrac{a}{x}$ é igual a $\sqrt{a}$ e, por isso, $\sqrt{a} \leq y$. Portanto,

$$\sqrt{a} \leq y < x, \text{ ou seja, } \sqrt{a} \leq \frac{x + \dfrac{a}{x}}{2} < x, \text{ para todo } x > \sqrt{a}.$$

Portanto, x_n é limitada. Como x_n é uma sequência decrescente, segue que essa sequência é convergente. Considere $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to L$. Então, fazendo $n \to +\infty$ na igualdade

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \dfrac{a}{x_n}}{2},$$

temos que:

$$c = \frac{L + \dfrac{a}{L}}{2} \Rightarrow 2L = L + \frac{a}{L} \Rightarrow L^2 = a \Rightarrow L = \sqrt{a}.$$

■

Agora, vamos aos exercícios.