b) A derivada parcial de f em relação a y fica dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{2x(y+k)-4(y+k)-(2xy-4y)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{2xy+2xk-4y-4h-2xy+4y}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{2xk-4k}{k} = \lim_{k\to 0}(2x-4) = 2x-4.$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x-4$.

c) Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y$, segue que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2\cdot 1 = 2$.

d) Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x-4$, segue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2\cdot(-1)-4 = -6$.

■

Exemplo 1.9.2 *Utilize a Definição 1.9.1 para encontrar as funções* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, *sendo* $f(x,y) = 3x^2-2xy+y^2$.

Solução: A derivada parcial de f em relação a x fica dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-2(x+h)y+y^2-(3x^2-2xy+y^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-2xy-2yh+y^2-3x^2+2xy-y^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-2yh}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h-2y) = 6x-2y.$$

Por outro lado, a derivada parcial de f em relação a y fica dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{3x^2-2x(y+k)+(y+k)^2-(3x^2-2xy+y^2)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{3x^2-2xy-2xk+y^2+2yk+k^2-3x^2+2xy-y^2}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{-2xk+2yk+k^2}{k} = \lim_{k\to 0}(-2x+2y+k) = -2x+2y.$$

■

De forma similar a que foi feita em funções reais de uma variável real, a definição de derivadas parciais de f em relação a variável x_i pode ser adaptada para um ponto específico, como apresentada a seguir.

Definição 1.9.2 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $A = (a_1, \cdots, a_n) \in D$. Então,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h_i},$$

se o limite existir.

■

Exemplo 1.9.3 *Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, -2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$, sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2.$$

Solução: Para a derivada parcial de f em relação a x, aplicada ao ponto $(3, -2)$, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, -2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h, -2) - f(3, -2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(3 + h)^2 - 2(3 + h)(-2) + (-2)^2 - (3.3^2 - 2.3.(-2) + (-2)^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{27 + 18h + 3h^2 + 12 + 4h + 4 - 43}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0}(22 + 3h) = 22 + 0 = 22.$$

Por outro lado, para a derivada parcial de f em relação a y, aplicada ao ponto $(0, 1)$, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 1 + h) - f(0, 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot (1 + h) + (1 + h)^2 - (0 - 0 + 1^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2 + h) = 2.$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(3, -2) = 22$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$. ■

É importante ressaltar que a Definição 1.9.1 gera uma função e, por essa razão, estão sendo exibidas todas as derivadas parciais da função f em relação a variável x_i. Já a Definição 1.9.2 gera um ponto, ou seja, ela dá o valor da derivada parcial de f em relação a variável x_i num ponto A específico. Considerando $x_i = a_i + h_i$, se $h_i \to 0$, segue que $x_i \to a_i$ e $h_i = x_i - a_i$. Consequentemente, a Definição 1.9.2 pode ser reescrita como a seguir.

Definição 1.9.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $A = (a_1, \cdots, a_n) \in D$. Assim,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{x_i - a_i},$$

se o limite existir.

■

Para duas variáveis, reescrevendo as derivadas parciais de f em relação a x ou a y, no ponto $(a,b) \in D_f$, segundo a Definição 1.9.3, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}, \text{ se o limite existir, e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}, \text{ se o limite existir.}$$

Exemplo 1.9.4 *Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,-2)$ para a função*

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2.$$

Solução: Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,-2) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x,-2) - f(3,-2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3x+13)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(3x+13) = 9 + 13 = 22.$$

■

Observação 1.9.2 *Comparando as Definições de derivada parcial de uma função f em relação a uma variável x_i, percebemos que essa é similar a derivada de uma função real de uma variável, da seguinte forma: sendo x_i a variável em estudo, as demais variáveis estão fixadas. Por isso, podemos considerar a função $\phi(x_i) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ e, consequentemente,*

$$\frac{d\phi}{dx_i}(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

Por exemplo, para funções de duas variáveis f_x é a derivada $\dfrac{d\phi}{dx}(x)$ da função $\phi(x) = f(x,y)$, com y constante. Analogamente, f_y é a derivada $\dfrac{d\varphi}{dy}(y)$ da função $\varphi(y) = f(x,y)$, com x constante.

■

Exemplo 1.9.5 *Encontre $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = 3x^3 - 4x^2y + \operatorname{sen}(xy^2).$$

Solução: Tomando f como sendo uma função da variável x, consequentemente, mantendo y constante, temos que

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^3) - \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(\text{sen}(xy^2)) =$$

$$= 9x^2 - 8xy + y^2\cos(xy^2).$$

Por outro lado, considerando f como sendo uma função da variável y, por isso mantemos x constante, temos que

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}(xy^2)) =$$

$$= -4x^2 + 2xy\cos(xy^2).$$

■

Exemplo 1.9.6 *Encontre $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, sendo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \ln(xy).$$

Solução: Considerando f como sendo uma função de x, então, temos que

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \ln(xy)\right) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x}.$$

Por outro lado, mantendo x fixo, temos que

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \ln(xy)\right) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y}.$$

■

Exemplo 1.9.7 *Dado*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

mostre que:

a) $f_x(0,y) = -y$, para todo y; *b) $f_y(x,0) = x$ para todo x.*

Solução:

a) Para $y \neq 0$, temos que

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{-y^3}{y^2} = -y.$$

Por outro lado, sendo $y = 0$, então,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = -y.$$

Portanto, $f_x(0,y) = -y$, para todo y.

b) Se $x \neq 0$, temos que

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{x^2} = x.$$

Por outro lado, sendo $x = 0$, então,

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = x.$$

Portanto, $f_y(x,0) = x$, para todo x.

■

Pela similaridade entre derivadas parciais e a derivada de funções reais de uma variável real, obtemos os resultados a seguir, cuja demonstração fica deixada como exercício.

Teorema 1.9.1 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções, $P \in D$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

a) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(k) = 0$;

b) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$;

c) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$, *se* $i \neq j$;

d) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_i^n) = n x_i^{n-1}$, $n \in \mathbb{Q}$;

e) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(kf(P)) = k\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f(P))$;

f) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g)(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P) \pm \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(P)$;

g) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot g(P) + f(P) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(P)$;

h) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{f}{g}(P)\right) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P)\cdot g(P) - f(P)\cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(P)}{(g(P))^2}$;

i) ***Regra da Cadeia****: Seja* $h : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função, então,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(h \circ f)(P) = h'(f(P)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(P).$$

Demonstração: Exercícios. ■

Exemplo 1.9.8 *Considere a função dada por* $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$. *Sendo assim, calcule:*

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$; *b)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$; *c)* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$; *d)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Solução: Primeiro, vamos obter a derivada da função $u = f(v) = \arctan(v)$. Sendo $u = \arctan(v)$, então, queremos obter $\dfrac{du}{dv}$. Assim,

$$u = \arctan(v) \Rightarrow \tan(u) = v \Rightarrow \frac{d}{dv}(\tan(u)) = \frac{d}{dv}(v) \Rightarrow \sec^2(u) \cdot \frac{du}{dv} = 1.$$

Como $\tan^2(u) + 1 = \sec^2(u)$, segue que $\sec^2(u) = 1 + v^2$ e, consequentemente,

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{v^2 + 1}.$$

Assim, temos que:

a) Considerando $v = x^2 + y^2$, segue que $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$ e, consequentemente, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\arctan)(x^2 + y^2) \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2 + 1} \cdot 2x$, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2 + 1}.$$

b) Analogamente, considerando $v = x^2+y^2$, segue que $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y$ e, consequentemente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\arctan)(x^2+y^2)\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2 + 1}\cdot 2y$, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2 + 1}.$$

c) Do Item (a), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2 + 1}\right)\Bigg|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{2 \cdot 1}{(1^2 + 1^2)^2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

d) Do Item (b), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2+1}\right)\bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{2\cdot 0}{(0^2+0^2)^2+1} = 0.$$

■

Seja $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\omega = f(P)$, $P \in D_1$. Então, temos que f pode ser reescrita como sendo uma função $g : D_2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $g(P, \omega(P)) = 0$, para todo $P \in D_1$. No primeiro caso, ou seja, quando $\omega = f(P)$, dizemos que a função ω está definida *Explicitamente*. Já no caso $g(P, \omega(P)) = 0$, dizemos que ω está definida *Implicitamente*. Por exemplo, a calota superior da esfera centrada na origem e raio 1 pode ser representada de forma explícita pela equação $\omega = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, ou de forma implícita pela expressão $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$. Vamos tentar calcular a derivada parcial de funções conhecendo a sua representação implícita.

Exemplo 1.9.9 *Seja $z = f(x,y)$ a função dada implicitamente por $x^2+y^2+z^2 = 1$, com $z \geq 0$. Obtenha $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.*

Solução: Para o caso $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, temos que $\dfrac{\partial z}{\partial x} \neq 0$, visto que z não é constante em relação a x. Por isso, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2z} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

com $x^2+y^2 < 1$. Já para o caso $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, temos que $\dfrac{\partial z}{\partial y} \neq 0$, visto que z não é constante em relação a y. Por isso, segue que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2z} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

com $x^2+y^2 < 1$. ■

Exemplo 1.9.10 *Suponha que $z = f(x,y)$ seja dada implicitamente pela equação $e^{xyz} = x^2+y^2+z^2$. Suponha que f admita derivada parcial em relação a x. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y e z.*

Solução: Para todo $(x,y) \in D_f$ temos que

$$e^{xyz} = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xyz}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{xyz} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[xyz] = 2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(xye^{xyz} - 2z) = 2x - yze^{xyz} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 2z}.$$

■

Exemplo 1.9.11 *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Considere a função $g(x,y) = \phi(x^2 + y^2)$. Verifique que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.*

Solução: Observe que $g(x,y) = \phi(u)$, onde $u = x^2 + y^2$. Daí, pela regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \phi'(u)\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\phi'(u) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2\phi'(2).$$

Analogamente, temos que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \phi'(u)\frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\phi'(u) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 2\phi'(2).$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2\phi'(2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1,1).$$

■

Exemplo 1.9.12 *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Então, determine:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; *b)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Solução:

a) Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) - (x^3 - y^2) \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por outro lado, se $(x, y) = (0, 0)$, então, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3 - 0^2}{x^2 + 0^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Portanto, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 - y^2)\cdot(x^2+y^2) - (x^3 - y^2)\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^3 - y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y - 2y^3 - 2x^3y + 2y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2y - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado, para $(x, y) = (0, 0)$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{0^3 - y^2}{0^2 + y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-1}{y} = \pm\infty$$

e, por isso, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

■

Interpretação Geométrica Para Derivadas Parciais de Funções de Duas Variáveis

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis. Veremos que uma das interpretações geométrica para derivadas parciais de f está relacionada com a inclinação de reta tangente, ideia similar a apresentada para funções reais de uma variável real.

Como f é uma função de duas variáveis, segue que o gráfico de f é uma superfície s, cuja equação fica dada por $z = f(x, y)$. Considere $(a, b) \in D$. Se y é mantido constante, digamos, $y = b$, então, temos que $z = f(x, b)$ é a equação de uma curva α dada pelo traço da superfície s no plano $y = b$. A curva α é obtida pelas equações:

$$y = b \text{ e } z = f(x, y), \tag{1.1}$$

visto que α é a curva que surge da interseção dessas duas superfícies. Assim, $f_x(a, b)$ nos fornece a inclinação da reta tangente à curva α dada pela Equação 1.1 no ponto $P = (a, b, f(a, b))$, no plano $y = b$, como visto na Figura 1.21.

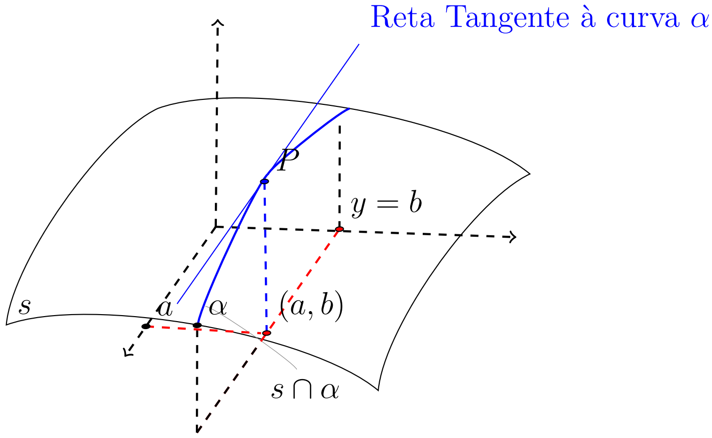

Figura 1.21: Ilustração da reta tangente de inclinação dada por $f_x(a, b)$.

Analogamente, $f_y(a, b)$ representa a inclinação da reta tangente à curva α dada pela Equação 1.2 no ponto $P = (a, b, f(a, b))$, no plano $x = a$, como visto na Figura 1.22.

$$x = a \text{ e } z = f(x, y). \tag{1.2}$$

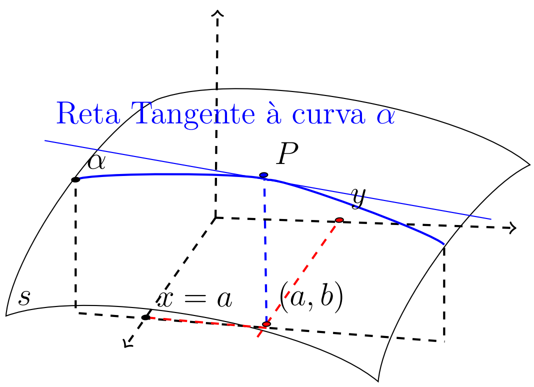

Figura 1.22: Ilustração da reta tangente de inclinação dada por $f_y(a, b)$.

Vejamos uma aplicação.

Exemplo 1.9.13 *Encontre a inclinação da reta tangente à curva de interseção das superfícies* $z = \dfrac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$ *com o plano* $y = 2$*, no ponto* $P = (2, 2, \sqrt{3})$.

Solução: A inclinação da reta tangente pedida é o valor da derivada parcial de $f(x,y)$, em relação à variável x visto que y está fixado, no ponto $P = (2,2,\sqrt{3})$. Como

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{1}{2}.(-2x)}{2\sqrt{24-x^2-2y^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{24-x^2-2y^2}},$$

segue que a inclinação da reta tangente no ponto pedido fica dada por

$$f_x(2,2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

Outra interpretação para derivadas parciais está relacionada com taxas de variações. Então, se f é uma função de duas variáveis, x e y, a derivada parcial de f em relação a x no ponto $A = (a,b)$ dá a taxa de variação instantânea, em A, de $f(x,y)$ por unidade de variação de x, mantendo y constante. Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y, no ponto $A = (a,b)$, dá a taxa de variação instantânea de $f(x,y)$ por unidade de variação de y, mantendo x constante.

Exemplo 1.9.14 *De acordo com a Lei dos Gases Ideais, para um gás confinado, se P newton por metros quadrados é a pressão, V metros cúbicos é o volume e T graus é a temperatura, então, temos que*

$$PV = kT,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de um gás em certo recipiente seja $100m^3$, que a temperatura seja de 90^o e que a constante de proporcionalidade seja $k = 8$.

a) Encontre a taxa de variação de P, por unidade de variação de T, se V permanece constante;

b) Use o resultado do Item (a) para encontrar o valor aproximado da taxa de variação da pressão, se a temperatura for aumentada para 92^o;

c) Encontre a taxa do volume V, por unidade de variação em P, se T permanece constante;

d) Suponha que a temperatura seja mantida constante. Use o resultado do Item (c) para encontrar a variação aproximada do volume necessária para produzir a mesma variação na pressão que foi obtida no Item (b).

Solução:

a) Como $P = \dfrac{8T}{V}$, segue que a taxa de variação de P em função de T fica dada por $\dfrac{\partial P}{\partial T}$, ou seja,

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = 0,08.$$

Portanto, taxa de variação de P é de $0,08$ unidades de variação da pressão P por unidade de variação da temperatura T.

b) Aumentando a temperatura para 92^o, segue que há uma variação de 2^o na temperatura. Como $\dfrac{\partial P}{\partial T} = 0,08\ \dfrac{u.P.}{u.T}$, segue que a pressão vai ter um aumento de $2 \cdot 0,08 = 0,16$ newton por metros quadrados. Da relação entre volume, pressão e temperatura $PV = kT$, tomando $V = 100$, $T = 90$ e $k = 8$, segue que $P = 7,2$. Daí, aumentando a temperatura de 90^o para 92^o, segue a pressão aumenta de $P = 7,2$ para $P = 7,2 + 0,16 = 7,36$ newton por metros quadrados.

c) Como $V = \dfrac{8T}{P}$, segue que a taxa de variação de V em função de P fica dada por $\dfrac{\partial V}{\partial P}$, ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{-8T}{P^2} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{8 \cdot 90}{(7,2)^2} = -13,9.$$

Portanto, taxa de variação de V é de $-13,9$ unidades de variação do volume por unidade de variação da pressão P.

d) Por fim, como $PV = kT$, e kT está fixo, temos que para a pressão aumentar $7,36$ newton, a variação do volume deve ser de $0,16 \cdot (-13,9) = -2,224$ unidades, ou seja, o volume deve diminuir em $2,224$ metros cúbicos.

■

É importante ressaltar que a existência das derivadas parciais de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 1)$ num ponto $A \in D$ não garante a continuidade da função em A. O exemplo a seguir vai ilustrar tal comentário, ou seja, a função possui derivadas parciais num ponto, mas a mesma não é contínua nesse ponto.

Exemplo 1.9.15 *Mostre que a função*

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$*, mas que* f *não é contínua na origem.*

Solução: Observe que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x,0) - h(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0, \text{ e}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{h(0,y) - h(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Portanto, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ existem. Agora, observe que se a função h fosse contínua na origem, então, $h(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$. Dessa forma, para qualquer caminho $\gamma(t)$ que possua a origem, temíamos que $h(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} h(\gamma(t))$. Daí, como

$$\lim_{t\to 0} h(t,t) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot t}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = h(0,0),$$

segue que h não é contínua na origem. No Exemplo 1.7.10, já tínhamos mostrado que h não é contínua na origem. ∎

Agora, faça alguns exercícios.

1.10 Exercício

Exercício 1.10.1 *Calcule todas as derivadas parciais possíveis, para cada uma das funções a seguir.*

a) $f(x,y) = 6x + 3y - 7$;

b) $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$;

c) $f(x,y) = 3xy + 6x - y^2$;

d) $f(x,y) = xy^2 - 5y + 6$;

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

f) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y}$;

g) $f(x,y) = 4y^2 + \sqrt{x^2+y^2}$;

h) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{y^2-x^2}$;

i) $f(\theta,\phi) = \operatorname{sen}(3\theta)\cos(2\phi)$;

j) $f(r,\theta) = r^2\cos(\theta) - 2r.\tan(\theta)$;

k) $f(x,y,z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$;

l) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$;

m) $f(x,y,z,r,t) = xyr + yzt + yrt + zrt$;

n) $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}\ln(\dfrac{x^2}{y})$;

o) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

p) $f(r,\theta) = e^{-\theta}\cos(\theta+\phi)$;

q) $f(x,y,z,w) = \arctan(xyzw)$;

r) $f(x,y,z) = 4xyz + \ln(2xyz)$;

s) $f(r,s,t,u,v,w) = 3r^2st + st^2v - 2tuv^2 - tvw + 3uw^2$;

Exercício 1.10.2 *Considere a função* $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. *Verifique que* $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

Exercício 1.10.3 *Seja* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de uma variável real, diferenciável e tal que* $\phi'(1) = 4$. *Considere* $g(x,y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. *Calcule:*

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}g(1,1)$;

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}g(1,1)$.

Além disso, mostre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *tal que* $y \neq 0$, *temos que*

$$x \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercício 1.10.4 *Sabendo que* $y = y(x)$, *encontre* y' *para cada item a seguir.*

a) $x^2 - 5xy + 3y^2 = 7$;

b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{1}{2}$;

c) $\cos(x+y) + \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{1}{3}$;

d) $xe^{x^2+y^2} = 5y$.

Exercício 1.10.5 *Sabendo que $z = z(x,y)$, encontre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para cada item a seguir.*

a) $\sqrt{x^2+y^2} = 7$;

b) $e^{\frac{x}{y}} \ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = e^{-x}\cos(x+y)$;

c) $e^{xyz}\arctan\left(\dfrac{3xy}{z^2}\right) = 2$;

d) $4xyz + \ln(x^2+y^2) = 5xyz$.

Exercício 1.10.6 *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e considere $f(x,y) = (x^2+y^2)\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mostre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que*

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y).$$

Exercício 1.10.7 *Encontre a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36$ com os planos $x = 1$ e $z = -3$ no ponto $(-1, \sqrt{12}, -3)$.*

Exercício 1.10.8 *Encontre a inclinação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$ no ponto $(2,1,5)$. Faça um esboço desta curva.*

Exercício 1.10.9 *Encontre as inclinações das retas tangente à curva de intersecção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com os planos $y = 2$ no ponto $(1,2,2)$.*

Exercício 1.10.10 *Use a lei dos gases ideias, apresentada no Exemplo 1.9.14, para um gás confinado e mostre que*

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

Exercício 1.10.11 *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\phi'(3) = 4$. Seja $g(x,y,z) = \phi(x^2+y^2+z^2)$. Calcule $\dfrac{\partial}{\partial x}g(1,1,1)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}g(1,1,1)$ e $\dfrac{\partial}{\partial z}g(1,1,1)$.*