Capítulo 7

Funções Contínuas

Continuidade é um dos pontos centrais da Topologia. Funções contínuas apresentam características extremante importantes para a matemática. Nessa seção estudaremos os conceitos básicos da continuidade.

7.1 Definições e Primeiras Propriedades

Definição 7.1.1 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **Contínua** num ponto $a \in X$ quando para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem em $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.*

■

Simbolicamente,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0; x \in X \text{ e } |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

Definição 7.1.2 *Se uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua num ponto $a \in X$, então, dizemos que f é **Descontínua** em a.*

■

Da Definição 7.1.2, segue que uma função f é descontínua num ponto a se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ é possível encontrar um $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$. Em particular, tomando $\delta = \dfrac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in X$ tal que $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Portanto,

$$x_n \to a \text{ mas } f(x_n) \not\to f(a).$$

Definição 7.1.3 *Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **Contínua** se f for contínua em todos os pontos $a \in X$.*

■

Observação 7.1.1 *a) A continuidade é um fenômeno local, ou seja, uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de $f|_{V \cap X}$ é contínua em a.*

De fato:

$$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ é contínua em } a \in X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0; x \in X \ e\, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0;\ se\ x \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X,\ então,\ |f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\,|_{V \cap X} \textit{ é contínua em } a.$$

□

b) *Se $a \in X$ é um ponto isolado, então, toda função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a.*

De fato: *Como $a \in X$ é um ponto isolado, então, existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a-\delta, a+\delta) = \{a\}$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, temos que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$ e, portanto, f é contínua em a.* □

c) *De uma maneira mais geral, se X é um conjunto discreto, então, toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.*

d) *Se $a \in X \cap X'$, então, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se, $f(x) \to f(a)$ quando $x \to a$.*

De fato:

$$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ é contínua em } a \in X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0; x \in X \ e\, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

□

e) *Diferente da definição de limite, em continuidade é necessário que $a \in X$ e, por isso, podemos tomar $x = a$.*

■

Teorema 7.1.1 *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Demonstração:

Seja $c = \dfrac{f(a)+g(a)}{2}$ e defina $\epsilon = c - f(a) = g(a) - c$. Daí, temos que $c = f(a) + \epsilon$ e $c = g(a) - \epsilon$. Como f e g são contínuas em a, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$, então,

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon = c.$$

Analogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in X \cap (a - \delta_2, a + \delta_2)$, então,

$$c = g(a) - \epsilon < g(x) < g(a) + \epsilon.$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue que se $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, então,

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon = c = g(a) - \epsilon < g(x) < g(a)$$

e, portanto,

$$\exists\, \delta > 0; f(x) < c < g(x),\ \forall\, x \in X \cap (a-\delta, a+\delta).$$

■

Corolário 7.1.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in \mathbb{R}$. Assim, se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, $f(x)$ possui o mesmo sinal de $f(a)$.*

Demonstração: Tome $g(x) = 0$ (ou $f(x) = 0$), para todo x e aplique o Teorema 7.1.1. ■

O Corolário 7.1.1 nos diz que se uma função f é contínua num ponto a e $f(a) < 0$ (reciprocamente, $f(a) > 0$), então, existe uma vizinhança V de a tal que $f(x) < 0$ (reciprocamente, $f(x) > 0$), para todo $x \in V$. Portanto, se f é contínua num ponto a, com $f(a) \neq 0$, não tem como a função mudar de sinal bruscamente, sem a mesma assumir o valor zero num ponto.

Corolário 7.1.2 *Dadas $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$. Então, existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto, então, Y é aberto e se X é fechado, então, Z é fechado.*

Demonstração: Segue do Teorema 7.1.1, como f e g são contínuas, que para cada $y \in Y$, existe um intervalo aberto I_y, de centro y, tal que $\{y\} \subset X \cap I_y \subset Y$. Assim, temos que

$$\bigcup_{y \in Y} \left(X \bigcap I_y\right) \subset Y \Rightarrow Y \subset X \bigcap \left(\bigcup_{y \in Y} I_y \right) \subset Y.$$

Defina $A = \bigcup_{y \in Y} I_y$. Como A é a união de conjuntos abertos, segue que A é aberto (Teorema 5.1.1). Além disso, como $Y \subset X \cap A \subset Y$, segue que $Y = X \cap A$ e, consequentemente, segue que Y é aberto, visto que ele é a interseção de dois conjuntos abertos.

Observe que $Z = X \setminus \{x \in X; f(x) > g(x)\}$. Da primeira parte, temos que existe $B \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $Z = X \setminus (X \cap B) = X \cap (\mathbb{R} \setminus B)$. Assim, $F = \mathbb{R} \setminus B$ é fechado tal que $Z = X \cap F$. Em particular, sendo F fechado, segue que Z é a interseção de dois conjuntos fechados e, por isso, Z é fechado. ■

Teorema 7.1.2 *A fim de que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência $x_n \in X$, com $x_n \to a$, tenhamos $f(x_n) \to f(a)$.*

Demonstração: Exercício. Dica: siga a demonstração do Teorema 6.1.3. ■

Corolário 7.1.3 *Se $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas num ponto $a \in X$. Então, as funções $f \pm g$ e $f \cdot g$ também são contínuas em a. A função f/g é contínua em a, se $g(a) \neq 0$.*

Demonstração: Aplique os teoremas 3.3.2 e 7.1.2. ■

Exemplo 7.1.1 *a) Toda função polinomial*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

é contínua.

b) Toda função racional

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array},$$

onde p e q são polinômios é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \neq 0$.

c) A função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} sen\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

é descontínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \to o} f(x)$ não existe (Exemplo 6.1.4). Porém, f é contínua para todo $x \neq 0$.

d) A função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} x.sen\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) A função

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se \quad x \in \mathbb{Q}^C \end{cases} \end{array}$$

é descontínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Contudo, a função $\varphi|_{\mathbb{Q}}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{Q}$, visto que $\varphi|_{\mathbb{Q}} = 0$ é uma função constante. Analogamente, $\varphi|_{\mathbb{Q}^C}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{Q}^C$, visto que $\varphi|_{\mathbb{Q}^C} = 1$ é uma função constante. Definindo $\psi(x) = x\varphi(x)$, para todo x, segue que ψ é contínua em $x = 0$.

■

Teorema 7.1.3 *Seja $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g: Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ esteja bem definida. Então, $g \circ f$ é contínua em a.*

Demonstração: Dados $\epsilon > 0$, como g é contínua em b, existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y \text{ e } |y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon.$$

Da mesma forma, como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta.$$

Consequentemente,

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \epsilon,$$

terminando a demonstração do teorema. ■

Em outras palavras: a composta de duas funções contínuas é contínua.