Capítulo 3

Sequência de Números Reais

3.1 Limite de uma sequência

Observação 3.1.1 *Como visto na Definição 1.4.2, uma sequência s_n de números reais é qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n a um único número real x_n, chamado de n-ésimo termo da sequência. Notação:*

$$s_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n).$$

Observação 3.1.2 *É importante ressaltar que uma sequência é diferente de um conjunto. Observe que a sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é diferente do conjunto $\{1, 1, 1, \cdots\}$, ou seja,*

$$(1, 1, 1, \cdots) \neq \{1, 1, 1, \cdots\} = \{1\}.$$

Com a mesma ideia temos que a igualdade de duas sequências exige que todos elementos correspondentes das duas sequências sejam iguais pois, caso contrário, elas serão diferentes. Por exemplo, se $s_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ e $r_n = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \cdots)$, segue que

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots) = s_n \neq r_n = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \cdots).$$

Portanto, duas sequências $s_n = (x_n)$ e $r_n = (y_n)$ são iguais se, e somente se, $x_n = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.1 *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sequência injetiva. Nesse caso, dizemos que f é uma sequência de termos Dois a Dois Distintos.*

Observação 3.1.3 *Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sequência injetiva, então, sempre que $i \neq j$, com $i, j \in \mathbb{N}$, temos que $x_i \neq x_j$.*

Definição 3.1.2 *Uma sequência s_n é dita ser Limitada Superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.1.3 *Uma sequência s_n é dita ser Limitada Inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.1.4 *Uma sequência s_n é dita ser Limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente ao mesmo tempo.*

Observação 3.1.4 *Da Definição 3.1.4 temos que uma sequência é limitada quando existe um número real positivo k tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, veja alguns exemplos.*

Exemplo 3.1.1 *a) Usando sequência podemos provar que $\mathbb{N}$ é ilimitado.*

De fato: *Temos que a sequência s_n dada por $(x_n) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, visto que $x_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se s_n é limitada superiormente, então, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup(\{s_n\})$. Como b é a menor das cotas superiores do conjunto $\{s_n\}$, segue que $b-1$ não é cota superior desse conjunto e, por isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b-1 < x_n = n$, ou seja, $b < n+1$, o que é um absurdo com a minimalidade de b. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado.* □

b) Se $a > 1$, então, a sequência $(a_n) = (a, a^2, a^3, \cdots)$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superiormente.

De fato: *Como $a > 1$, segue que*

$$a \cdot a^n > 1 \cdot a^n \Rightarrow a^{n+1} > a^n,$$

e, por isso, $a^n \geq a$, para todo n. Logo, a sequência (a_n) é limitada inferiormente. Por outro lado, considere $a = 1 + d$. Como $a > 1$, segue que $d > 0$. Assim, da Desigualdade de Bernoulli, segue que $a^n \geq 1 + nd$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, como existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + nd > c$, temos que $a^n > c$ e, consequentemente, (a_n) não é limitada superiormente. □

c) Se $0 < a < 1$, então, a sequência $(a_n) = (a, a^2, a^3, \cdots)$ é limitada.

De fato: *Como $0 < a < 1$, segue que 1 é limite superior de (a^n). Logo, a sequência (a_n) é limitada superiormente. Por outro lado, como $0 < a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que 0 é um limite inferior de (a_n). Portanto, (a_n) é limitada.* □

d) A sequência $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

De fato: *Como $n \in \mathbb{N}$, segue que $0 < \dfrac{1}{n}$, para todo n. Além disso, como $n \leq 1$, segue que $1 \leq \dfrac{1}{n}$ e, por isso, $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leq 1$, para todo n. Portanto, a sequência (a_n) é limitada.* □

■

Agora vamos definir o que chamaremos de *Subsequências*.

Definição 3.1.5 *Dada uma sequência $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma Subsequência de (x_n) é a restrição da função f a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Notação:*

$$(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Observe que uma subsequência $f : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$, na frieza da definição, não é uma sequência, visto que $\mathbb{N}' \neq \mathbb{N}$. Contudo, como podemos estabelecer uma relação biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'$, segue que a associação entre sequências e subsequências fica bem estabelecida como uma composição de funções e, assim, a notação (x_{n_k}) faz sentido. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.1.2 *a) Se $s_n = (n)$, então, $s_{2n} = (2n)$ é uma subsequência, chamada de subsequência dos números pares.*

b) Seja $a < -1$. Então, a subsequência $(x_{2n}) = (a^{2n})$ é limitada inferiormente, já que $a^{2n} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Seja $a < -1$. Então, a subsequência $(x_{2n+1}) = (a^{2n+1})$ é limitada superiormente, visto que $a^{2n+1} < -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Agora falaremos de Séries Convergentes, para isso, vamos apresentar a definição de *Limites de Sequências.*

Definição 3.1.6 *Um número real a é dito ser o Limite da sequência (x_n) quando dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $|x_n - a| < \epsilon$. Notação:*

$$\lim x_n = a, \lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ ou } x_n \to a.$$

Observação 3.1.5 *Dizer que $x_n \to a$ equivale a dizer que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $|x_n - a| < \epsilon$. Assim, para $n > n_0$ temos que $|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, ou seja, $a = \lim x_n$ se todos os pontos da sequência, exceto um número finito deles, digamos $(x_1, x_2, \cdots, x_{n_0})$, estão no intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, sendo que o índice n_0 depende do ϵ escolhido.*

Observação 3.1.6 *Dizer que $x_n \to a$ na Definição 3.1.6 é equivalente a dizer que para n suficientemente grande podemos tomar valores de x_n tão próximos de a quanto se deseje, estabelecendo-se uma margem de erro $\epsilon > 0$.*

Definição 3.1.7 *Uma sequência (x_n) é dita ser Convergente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$. Caso contrário, a sequência é dita ser Divergente.*

Teorema 3.1.1 *(**Unicidade do Limite**) Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$, tais que $x_n \to a$ e $x_n \to b$. Considere $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então, $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. De maneira análoga, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_2$, então, $x_n \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$. Assim, para $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que:

$$\epsilon = \frac{|b-a|}{2} \leq \frac{|b-x_n|}{2} + \frac{|x_n-a|}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, não existe $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$, tais que $x_n \to a$ e $x_n \to b$. ■

Teorema 3.1.2 *Se $x_n \to a$, então, toda subsequência de (x_n) também converge para a.*

Demonstração: Como $x_n \to a$, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_o$, então, $|x_n - a| < \epsilon$. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Daí, existe um índice $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_o} > n_o$. Logo, se $n > n_{k_o}$, então, $x_{n_{k_o}} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e, consequentemente, $x_{n_k} \to a$. ■

Teorema 3.1.3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Solução: Seja (x_n) uma sequência convergente, digamos $x_n \to a$. Então, para $\epsilon = 1$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_o$, então, $x_n \in (a-1, a+1)$. Agora, considere o conjunto $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n_o}, a-1, a+1)$. Como X é finito, segue que X é limitado e, por isso, podemos considerar $b, c \in \mathbb{R}$ tal que $X \subset [b, c]$. Consequentemente, $(x_n) \subset [b, c]$ e, por isso, (x_n) é uma sequência limitada. ■

Observe que o Teorema 3.1.3 diz que toda sequência convergente é limitada, mas não garante a recíproca. No Exemplo 3.1.3 é ilustrada a não validade dessa recíproca.

Exemplo 3.1.3 *Mostre que a sequência* $(2, 0, 2, 0, 2, 0, \cdots)$*, cujo termo geral é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, não é convergente.*

Solução: Suponha que a sequência S_n seja convergente para a. Assim, pelo Teorema 3.1.2, seque que qualquer subsequência de S_n também converge para a. Observe a subsequência $s_{2n+1} = (2, 2, 2, \cdots)$ é uma sequência constante e, por isso, $x_{2n+1} \to a = 2$. Por outro lado, a subsequência $s_{2n} = (0, 0, 0, \cdots)$ também é uma sequência constante e, da mesma forma, $x_{2n} \to a = 0$. Portanto, como as subsequências s_{2n} e s_{2n+1} convergem para limites diferentes, segue do Teorema 3.1.2 que s_n não é uma sequência convergente. ■

A contra-recíproca do Teorema 3.1.3 diz que se uma sequência não é limitada, então, ela não pode ser convergente.

Exemplo 3.1.4 *Mostre que a sequência $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente.*

Solução: Como $\mathbb{N}$ não é limitado, segue da contra-recíproca do Teorema 3.1.3 que $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente. ■

De uma forma geral a limitação de uma sequência não garante a convergência. Contudo, em alguns caso a convergência poderá ser garantida, mas para isso é preciso introduzir a noção de *Monotonicidade* para sequências, introduzidas a seguir.

Definição 3.1.8 *Uma sequência (x_n) é dita ser Monótona Crescente quando $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência (x_n) é dita ser Monótona Não-Decrescente quando $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.1.9 *Uma sequência (x_n) é dita ser Monótona Decrescente quando $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência (x_n) é dita ser Monótona Não-Crescente quando $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.1.10 *Dizemos que uma sequência é dita ser Monótona quando ela é monótona crescente, monótona decrescente, monótona não-crescente ou monótona não-decrescente.*

Observação 3.1.7 *Observe que toda sequência monótona não crescente (ou monótona decrescente) é limitada superiormente, visto que $x_1 \geq x_n$, para todo $n \geq 1$.*

Por outro lado, toda sequência monótona não decrescente (ou monótona crescente) é limitada inferiormente, visto que $x_1 \leq x_n$, para todo $n \geq 1$.

Exemplo 3.1.5 *a) A sequência (x_n) dada por $x_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é limitada, monótona não decrescente e monótona não crescente.*

De fato: *Observe que (x_n) é constante e, por isso, $x_n - 1 = 0 < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x_n \to 1$. Além disso, $x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (x_n) é monótona não crescente. Analogamente, $x_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (x_n) é monótona não decrescente.* □

b) A sequência (x_n) dada por $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente.

De fato: *Temos que $x_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (x_n) é limitada inferiormente. Já provamos que $\mathbb{N}$ é ilimitado e, por isso, (x_n) é ilimitado superiormente, visto que essa sequência é limitada inferiormente. Por fim, como $n < n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que (x_n) é monótona crescente.* □

c) A sequência (x_n) dada por $x_n = 0$, se n é par e $x_n = 1$, se n é impar, é limitada, mas não é monótona. Além disso, a sequência (x_n) não é convergente.

De fato: *A sequência (x_n) é limitada, visto que $(x_n) \subset [0, 1]$. Além disso, temos que (x_n) visto que não vale $1 \geq 0 \geq 1$, para três termos consecutivos, começando com um termo de posição ímpar da sequência. Por fim, como $x_{2n} \to 0$ e $x_{2n+1} \to 1$, seque que a sequência não converge.* □

d) A sequência (x_n) dada por $x_n = \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é limitada e monótona decrescente.

De fato: *Observe que para todo número natural diferente de 1, temos que $n > 1$ e, consequentemente, $\dfrac{1}{n} < 1$. Além disso, como $n > 0$, segue que $\dfrac{1}{n} > 0$ e, por isso, $(x_n) \subset [0, 1]$, ou seja, (x_n) é i,a sequência limitada. Por outro lado, como $n < n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ e, por isso, (x_n) é uma sequência monótona decrescente.* □

e) A sequência (x_n) dada por $x_n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é monótona e limitada (quando $0 \leq a \leq 1$).

De fato: *Para provar que* (x_n) *é limitada, quando* $0 \leq a \leq 1$, *observe que se* $a = 0$ *ou* $a = 1$ *a sequência é constante e, consequentemente, limitada. Além disso, se* $0 < a < 1$, *então,* $a^{n+1} < a^n < 1$ *e, por isso, temos que* (x_n) *é limitada, visto que* $(x_n) \subset [0, 1]$, *quando* $0 \leq a \leq 1$. *No Exemplo 3.1.1 já provamos que a sequência* (x_n) *é monótona.* □

Vamos agora a algumas propriedades envolvendo sequências de números reais.

Teorema 3.1.4 *Se uma sequência monótona* (x_n) *possui uma subsequência limitada, então,* (x_n) *é limitada.*

Demonstração: Suponha que (x_n) seja uma sequência monótona, digamos não decrescente. Assim, temos que $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ uma subsequência limitada. Então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $x_{n_k} \leq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que $x_n \leq x_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, só falta provar que $x_n \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesse sentido, para cada $n \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_k$ e, consequentemente, $x_n < x_{n_k} \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitada. A demonstração do caso onde a sequência é monótona não crescente é análoga e, por isso, é deixada de exercício. ■

O próximo resultado é muito importante, visto que ele nos auxilia a garantir convergência de sequências monótonas e limitadas.

Teorema 3.1.5 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona e limitada, digamos não decrescente. Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ o conjunto formado pelos elementos da sequência e tome $a = \sup X$. Tome $\epsilon > 0$. Assim, temos que $a - \epsilon$ não é cota superior de X e, por isso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $a - \epsilon < x_n \leq a$, ou seja, se $n > n_0$, então, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ e, consequentemente, temos que $x_n \to a$. Caso a sequência seja não crescente, tome $a = \inf X$ para demonstrar o resultado. ■

Corolário 3.1.1 *Se* (x_n) *é uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, então,* (x_n) *é convergente.*

Demonstração: Como (x_n) possui uma subsequência convergente, então, essa subsequência é limitada e, por isso, (x_n) é limitada e monótona. Consequentemente, (x_n) é convergente. ■

Observe que os últimos resultados garante a convergência, mas não fala qual é o valor do limite. Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.6 *a) A sequência* $(x_n) = (1, 1, 1, \cdots)$ *é convergente, visto que ela é monótona e limitada. Além disso,* $x_n \to 1$.

b) De uma forma mais geral, qualquer sequência $(x_n) = (a, a, a, \cdots)$, *com* $a \in \mathbb{R}$ *é convergente. Além disso,* $x_n \to a$.

c) A sequência $(x_n) = (1, 2, 3, 4, \cdots)$ não é convergente e, por isso, como ela é monótona, ela não pode ser limitada.

d) A sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, visto que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{R}$, e é monótona, visto que $n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, para todo n. Portanto, $\left(\frac{1}{n}\right)$ é uma sequência convergente.

e) A sequência $(x_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots)$ não é convergente, visto que ela não é limitada.

f) A sequência (x_n) dada por $x_n = a^n$, quando $0 \leq a \leq 1$, é convergente, visto que ela é limitada e monótona.

■

Vamos agora apresentar o Teorema de Bolzano-Weiestrass. Esse teorema é muito importante nos conceitos estudados em Análise. Antes, vamos a uma definição que usaremos na demostração do teorema.

Definição 3.1.11 *Um termo x_k de uma sequência (x_n) é chamado de Destacado quando $x_k \geq x_p$, para todo $p > k$.*

Corolário 3.1.2 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass): Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convertente.*

Demonstração: Para provar esse resultado só é preciso demonstrar que toda sequência limitada (x_n) de números reais possui uma subsequência monótona, visto que, cessa caso, a subsequência será monótona e limitada e, consequentemente, convergente.

Assim, seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for infinito, digamos $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots\}$, então, temos que a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ é monótona e limitada. Consequentemente, $(x_n)_{n \in D}$ é convergente.

Por outro lado, se D é finito, podemos considerar x_{n_1} o elemento com o maior índice de D. Assim, temos que x_{n_1} é o maior termo da sequência que é destacado, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Como x_{n_2} não é destacado, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$ em (x_n) e, consequentemente, (x_{n_k}) é convergente. ■

Veja alguns exemplos.

Exemplo 3.1.7 *A sequência $s_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ é monótona decrescente e limitada. Assim, temos que s_n é convergente. Como $\lim \frac{1}{n} = \inf \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} = 0$, segue que $s_n \to 0$.*

■

Exemplo 3.1.8 *Seja* $0 < a < 1$*. Assim, a sequência* $(a, a^2, a^3, \cdots)$ *é monótona decrescente. Além disso, temos que* $a^n \to 0$*, pois dado* $\epsilon > 0$*, como* $\frac{1}{a} > 1$*, segue do Item* (1) *do Exemplo 3.1.1 que existe um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$*, então,* $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\epsilon}$*, ou seja,* $\epsilon < a^n$*. Portanto,* $\lim a^n = \inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

$\blacksquare$

Agora, vamos aos exercícios.