Capítulo 9

Fórmula de Taylor e aplicações da derivada

Aplicações elementares de derivada, como obtenção de extremos de funções reais de uma variável real e aplicação da regra de L'Hôpital já foram amplamente explorada nos cursos de Cálculo. Iremos agora explorar outras aplicações que, certamente, foram menos abordadas. Comecemos apresentando a *Fórmula de Expansão de Funções de Taylor*.

9.1 A Fórmula de Taylor

Para construirmos a *Fórmula de Taylor*, precisamos estender a definição de derivada para qualquer ordem, como apresentado a seguir.

Observação 9.1.1 *a) Para $n = 1, 2$ e 3, a n-ésima derivada de uma função f será denotada por $f'(a)$, $f''(a)$ e $f'''(a)$, respectivamente.*

b) Por definição, temos que $f''(a) = (f'(a))'$, $f'''(a) = (f''(a))'$, etc.. Ou seja, de um modo geral temos que a derivada de ordem n de f é dada por:

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)}(a))'.$$

c) Para que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido é necessário que $f^{(n-1)}(x)$ seja derivável em $x = a$, ou seja, que $f^{(n-1)}(x)$ esteja definida num conjunto onde a é um ponto de acumulação e que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$ exista.

d) Quando $f^{(n)}(a)$ existe para todo $a \in I$, então, dizemos que f é n vezes derivável em I.

■

Definição 9.1.1 *A n-**ésima Derivada** (ou a **Derivadas de ordem** n) de $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto a é a função dada por $f^{(n)}(a)$.*

■

Definição 9.1.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas até ordem n. Se $f^{(n)}(a)$ é uma função contínua, então, dizemos que f é de **Classe** C^n.*

■

Observação 9.1.2 *Se uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, dizemos que f é de classe C^∞. Além disso, se f é uma função contínua, então, dizemos que f é de classe C^0 (aqui estamos considerando que uma função contínua é a sua "derivada" de ordem zero).*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9.1.1 *a) Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f_n(x) = x^n|x|$. Então, temos que*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & se \quad x \geq 0 \\ -x^{n+1}, & se \quad x < 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, temos que f_n é uma função de classe C^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, visto que

$$\frac{d^n f_n}{dx^n}(x) = \begin{cases} n!x, & se \quad x \geq 0 \\ -n!x, & se \quad x < 0 \end{cases}.$$

Por outro lado, veja que $f_n(x)$ não é de classe C^{n+1} em zero, visto que não existe $\dfrac{d^{n+1} f_n}{dx^{n+1}}(0)$.

b) De um modo geral, as funções mais comumente encontradas como, por exemplo, as polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais, e logarítmicas, são de classe C^∞ nos elementos de seu domínio.

■

Agora, vamos a definir o chamado *Polinômio de Taylor*.

Definição 9.1.3 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n, definida num intervalo I. O **Polinômio de Taylor** de ordem n da função f no ponto a, é o polinômio*

$$p(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n,$$

de grau menor do que ou igual n, cujas derivadas de ordem menor do que ou igual a n no ponto $h = 0$, coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a.

■

Observação 9.1.3 *Como as derivadas de ordem i de p, em $h = 0$, coincidem com as derivadas de mesma ordem de f, em a, segue que*

$$p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a), \text{ para todo } i \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Dessa forma, como

$$p^{(i)}(h) = i! a_i + \frac{(i+1)!}{1!} a_{i+1} h + \cdots + \frac{n!}{(n-i)!} a_n h^{n-i},$$

segue que $f^{(i)}(a) = p^{(i)}(0) = i! a_i$, ou seja, o polinômio de Taylor $p(h)$ é determinado de modo único por $p^{(i)}(0)$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$, ou seja, o Polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é o polinômio p dado por

$$p(h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n.$$

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9.1.2 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem dez da função* $f(x) = sen(x)$ *no ponto* $x = 0$.

Solução: Como $f(x) = sen(x)$, segue que $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = sen(x)$, $f^{(5)}(x) = \cos(x)$, $f^{(6)}(x) = -sen(x)$, $f^{(7)}(x) = -\cos(x)$, e assim por diante. Ou seja, em $x = 0$ as derivadas da função f ficam dadas por

$$(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots).$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 10 da função f, em $x = 0$, fica dado por

$$p(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \frac{h^9}{9!}.$$

■

Exemplo 9.1.3 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem cinco da função* $f(x) = \ln(x)$ *no ponto* $x = 1$.

Solução: Como $f(x) = \ln(x)$, segue que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ e $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$. Ou seja, em $x = 1$ as derivadas da função f ficam dadas por

$$(0, 1, -1, 2, -6, 24).$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 5 da função f, em $x = 1$, fica dado por

$$p(h) = h - \frac{1}{2!}h^2 + \frac{2}{3!}h^3 - \frac{6}{4!}h^4 + \frac{24}{5!}h^5 = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}.$$

■

Observação 9.1.4 *Observe que se* $p(h)$ *é o polinômio de Taylor de ordem* n *da função* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no ponto* $a \in I$, *então, a função* $r(h) = f(a+h) - p(h)$, *definida no intervalo* $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$ *é* n *vezes derivável no ponto* $0 \in J$, *com*

$$r(0) = r'(0) = \cdots = r^{(n)}(0) = 0.$$

■

Para provarmos a Fórmula de Taylor Infinitesimal, precisamos de alguns lemas, que apresentaremos a seguir.

Lema 9.1.1 *Seja* $r : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função* n *vezes derivável no ponto* $0 \in J$. *A fim de que seja* $r^{(i)}(0) = 0$ *é necessário e suficiente que* $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração: Suponhamos que as derivadas de r, até a ordem n, sejam nulas no ponto 0. Para $n=1$, temos que $r(0)=r'(0)=0$. Então,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)-r(0)}{h}=r'(0)=0.$$

Para $n=2$, temos que $r(0)=r'(0)=r''(0)=0$. Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\lim_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x}\right)\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{x}=0.$$

Daí, temos do Teorema do Valor Médio que para $h\neq 0$, existe $x\in(0,h)$ tal que

$$\frac{r(h)}{h^2}=\frac{r(h)-r(0)}{h^2}=\frac{r'(x)h}{h^2}=\frac{r'(x)}{h}.$$

Dessa forma, temos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{r'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{r'(x)}{x}\frac{x}{h}=0,$$

visto que $\dfrac{r'(x)}{x}\to 0$ ($h\to 0$ implica em $x\to 0$) e $\dfrac{x}{h}$ é limitado $\left(\dfrac{x}{h}\leq 1\right)$. Aplicando esse argumento para todo $n=3,4,\cdots,n$, chegamos ao resultado.

Reciprocamente, suponha que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$. Daí, temos que para todo $i=0,1,\cdots,n$ segue que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^i}=\frac{r(h)}{h^i}h^{n-i}=0.$$

Portanto,

$$r(0)=\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^0}=0 \text{ e } r'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{r(h)-r(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Agora, considere a função auxiliar $\varphi: J\to\mathbb{R}$ dada por $\varphi(h)=r(h)-\dfrac{r''(0)h^2}{2}$. Dessa forma, vale que $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$. Assim, da primeira parte já demonstrada, segue que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(h)}{h^2}=0$. Como $\dfrac{\varphi(h)}{h^2}=\dfrac{r(h)}{h^2}+\dfrac{r''(0)}{2}$, segue que $r''(0)=0$. Repetindo o argumento para $n=3,4,\cdots,n$, chegamos ao resultado. ■

Teorema 9.1.1 *(**Fórmula de Taylor infinitesimal**): Seja $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a\in I$. A função $r: J=\{h\in\mathbb{R}; a+h\in I\}\to\mathbb{R}$ definida no intervalo J da igualdade*

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+r(h),$$

cumpre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$. Reciprocamente, se $p(h)$ um polinômio de grau menor do que ou igual a n tal que $r(h)=f(a+h)-p(h)$, com $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$, então, $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a, isto é,

$$p(h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\cdot h^i.$$

Demonstração: A função r, definida pela fórmula de Taylor, é n vezes derivável no ponto 0 e tem as derivadas nulas nesse ponto, até a ordem n. Logo, pelo Lema 9.1.1, segue que $\lim_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$.

Reciprocamente, se $r(h)=f(a+h)-p(h)$ é tal que $\lim_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{h^n}=0$, segue do Lema 9.1.1 que $r^{(i)}(0)=0$, para todo $i=\{0,1,\cdots,n\}$. Dessa forma, temos que $p^{(i)}(0)=f^{(i)}(a)$, para todo i e, por isso, temos que $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a. ■

Exemplo 9.1.4 *Seja $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a\in I$, com $f^{(i)}(a)=0$, para todo $1\le i<n$ e $f^{(n)}(a)\neq 0$. Se n é par, então, temos que f possui um valor máximo local quando $f^{(n)}(a)<0$. Se n é ímpar, então a não é um extremo local.*

De fato: *A Fórmula de Taylor Infinitesimal de f, em a, pode ser escrita como*

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R(h)=h^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{R(h)}{h^n}\right).$$

Da definição de limites de funções, existe um $\delta>0$ tal que se $a+h\in I$ e $0<|h+0|<\delta$, então, $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\dfrac{R(h)}{h^n}$ tem o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Como $a\in\mathring{A}$, podemos considerar δ de forma que $|h|<\delta$ e que $a+h\in I$. Dessa forma, quando n é par e que $f^{(n)}(a)>0$, segue que a diferença $f(a+h)-f(a)>0$, sempre que $|h|<\delta$, ou seja, temos que a é um ponto de mínimo local de f. Analogamente, quando n é ímpar e $f^{(n)}(a)<0$, segue que a diferença $f(a+h)-f(a)<0$, sempre que $|h|<\delta$, ou seja, temos que a é um ponto de máximo local de f.

Por fim, quando n é impar, segue que h^n tem o mesmo sinal de h e, por isso, a diferença $f(a+h)-f(a)$ muda de sinal junto com h e, por isso, f não possui extremo em a. □

■

Exemplo 9.1.5 *(**A Regra de L'Hôpital Generalizada**): Sejam $f,g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções n vezes diferenciáveis no ponto a, com derivadas nulas nesses pontos até a ordem $n-1$. Se $g^{(n)}(a)\neq 0$, então,*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Solução: Da Fórmula de Taylor Infinitesimal, temos que

$$f(a+h)=h^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{R(h)}{h^n}\right)\text{ e } g(a+h)=h^n\left(\frac{g^{(n)}(a)}{n!}+\frac{S(h)}{h^n}\right),$$

com $\lim_{x\to a}\dfrac{R(h)}{h^n}=0=\lim_{x\to a}\dfrac{S(h)}{h^n}$. Assim,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\dfrac{R(h)}{h^n}}{\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}+\dfrac{S(h)}{h^n}}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

■

Observação 9.1.5 *a) A Fórmula de Taylor Infinitesimal recebe esse nome pois ela traz informação do que acontece quando* $h \to 0$.

b) Existem outras versões para esse teorema, por exemplo, podemos fazer estimativas para $f(a+h)$ *quando* h *está fixo. Essa fórmula que será apresentada a seguir, surge como uma extensão do Teorema do Valor Médio de Lagrange.*

Teorema 9.1.2 *(**Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange**): Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função* n *vezes diferenciável no intervalo aberto* (a,b)*, com* $f^{(n-1)}$ *contínua em* $[a,b]$*. Então, existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}(b-a)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Demonstração: Definia a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!}(b-x)^{(n-1)} - \frac{K}{n!}(b-x)^n,$$

onde a constante K é escolhida de forma que $\varphi(a) = 0$. Dessa forma, temos que φ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), com $\varphi(b) = 0 = \varphi(a)$. Como

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1},$$

segue do Teorema de Rolle (Teorema 8.4.2) que existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$, ou seja, $K = f^{(n)}(c)$. Assim, tomando $x = a$ obtemos o resultado. ■

Observação 9.1.6 *Podemos reescrever a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange como a seguir: tomando* $b = a+h$ *no Teorema 9.1.2, segue que existe* $\theta \in (0,1)$ *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{n!}h^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

■