1.7 A Integral de Funções Vetoriais de uma variável

Você já deve ter percebido que no estudo que fizemos até agora, estendemos os conceitos do cálculo de funções escalares (funções reais de uma variável real) para as funções vetoriais de uma variável real, aplicando em cada uma das funções coordenadas os conceitos. O mesmo se repete nessa seção. Para isso, vamos relembrar a ideia usada na construção de integrais de funções escalares.

Considere uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e considere também $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Chamemos de Δt_i o comprimento do intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Se $c_i \in I_i$, seque que podemos tomar a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i,$$

que é chamada de *Soma de Riemann* de f relativa a partição P. Calculando o limite da soma de Riemann quando $||\Delta t_i|| \to 0$, ou seja, quando o máximo do comprimento dos intervalos da partição tende a zero, se o limite existisse, tínhamos a Integral de Riemann, dada por

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{||\Delta t_i|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i.$$

Dessa forma, só precisamos definir a Soma de Riemann para funções vetoriais e, depois disso, precisamos calcular o valor do limite dessa soma, para obtermos a *Integral Definida* de uma função vetorial. Como o limite e a soma de funções vetoriais é obtido calculando o limite e a soma, respectivamente, de cada uma das funções coordenadas, podemos substituir a função escalar na definição de integral definida para funções escalares por uma função vetorial e utilizarmos a mesma ideia para definir a integral definida de funções vetoriais, como vemos a seguir. Começemos definindo a *Soma de Riemann para Funções Vetoriais.*

Definição 1.7.1 *Considere $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial e $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Chamamos de Δt_i o comprimento do intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ e seja $c_i \in I_i$. Assim, temos que a soma*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i$$

é chamada de Soma de Riemann de $\vec{f}$ relativa a partição P.

Definida a soma de Riemann para funções vetoriais, podemos calcular o valor do limite dessa soma quando o máximo do comprimento do intervalo I_i tende a zero. Se esse limite existir, ele será chamado de *Integral Definida da Função Vetorial*, como apresentado a seguir.

Definição 1.7.2 *Dizemos que o Limite de* $\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i$ *é* $\vec{F} \in \mathbb{R}^n$ *quando* $||\Delta|| = \max\{\Delta t_i, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$ *tende a zero, e escrevemos*

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i = \vec{F}$$

se $\forall\ \epsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *(que só depende de* ϵ *e não do* c_i *escolhido) tal que* $\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i - \vec{F}\right|\right| < \epsilon$ *para toda partição* P *de* $[a, b]$ *tal que* $||\Delta|| < \delta$.

Observação 1.7.1 *Quando o valor de* $\vec{F}$ *existe na Definição 1.7.2 ele é único e, por isso, utilizamos a notação*

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \lim_{||\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i.$$

Além disso, utilizando as propriedades de somatória de limite das funções vetoriais, temos que

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt \right).$$

Ou seja, a integral de uma função vetorial é dada pela integral de cada uma das suas funções coordenadas. Consequentemente, as propriedades de integração para funções vetoriais são similares às propriedades para funções escalares, aplicando coordenada-coordenada das funções vetoriais.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.7.1 *Calcule* $\int_a^b \vec{f}(t)dt$ *sendo* $\vec{f}(t) = (t, 4, t^2)$ *e* $[a, b] = [-1, 3]$.

Solução: Temos que $f_1(t) = t$. Dessa forma,

$$\int_{-1}^{3} f_1(t)dt = \int_{-1}^{3} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Por outro lado, temos que $f_2(t) = 4$. Consequentemente,

$$\int_{-1}^{3} f_2(t)dt = \int_{-1}^{3} 4dt = 4t|_{-1}^{3} = 12 - (-4) = 16.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = t^2$. Assim,

$$\int_{-1}^{3} f_3(t)dt = \int_{-1}^{3} t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{3} = \frac{27}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}.$$

Portanto,

$$\int_{-1}^{3} \vec{f}(t)dt = \left(4, 16, \frac{26}{3}\right).$$

■

Exemplo 1.7.2 *Calcule* $\int_{0}^{1} \vec{f}(t)dt$*, sendo* $\vec{f}(t) = \left(3t^4, \frac{1}{t^3}, 5t^{\frac{3}{2}}\right)$.

Solução: Temos que, $f_1(t) = 3t^4$. Daí,

$$\int_{0}^{1} f_1(t)dt = \int_{0}^{1} 3t^4 dt = \left.\frac{3t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Além disso, temos que $f_2(t) = \frac{1}{t^3} = t^{-3}$. Logo,

$$\int_{0}^{1} f_2(t)dt = \int_{0}^{1} t^{-3}dt = \left.\frac{-t^{-2}}{3}\right|_0^1 = \left.\frac{-1}{3t^2}\right|_0^1 = -\frac{1}{3} + \infty = +\infty.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = 5t^{\frac{3}{2}}$ e, consequentemente,

$$\int_{0}^{1} f_3(t)dt = \int_{0}^{1} 5t^{\frac{3}{2}}dt = \left.\frac{5t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \left.2t^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = 2.$$

Portanto,

$$\int_{0}^{1} \vec{f}(t)dt = \left(\frac{3}{5}, +\infty, 2\right).$$

■

Exemplo 1.7.3 *Calcule* $\int_{a}^{b} \vec{f}(t)dt$*, sendo* $\vec{f}(t) = \left(t^3(2t^2 - 3), \frac{t^2 + 4t + 4}{\sqrt{t}}\right)$ *e* $[a, b] = [1, 2]$.

Solução: Temos que

$$\vec{f}(t) = \left(t^3(2t^2 - 3), \frac{t^2 + 4t + 4}{\sqrt{t}}\right) = \left(2t^5 - 3t^3, t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}} + 4t^{\frac{-1}{2}}\right).$$

Dessa forma, temos que

$$\int_{1}^{2} \vec{f}(t)dt = \int_{1}^{2} \left(2t^5 - 3t^3, t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}} + 4t^{\frac{-1}{2}}\right) dt =$$

$$= \left(2\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^4}{4}, \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 4\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{t^6}{3} - \frac{3}{4}t^4, \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} + 8t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right), \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{16}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 8\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{63}{3} - \frac{45}{4}, \frac{(24+80+120)\sqrt{2}}{15} - \frac{6+40+120}{15}\right) = \left(\frac{39}{4}, \frac{224\sqrt{2} - 166}{15}\right).$$

$\blacksquare$

Agora, vamos aos exercícios.

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1 *Encontre a Integral Indefinida de cada uma das funções vetoriais abaixo.*

a) $\vec{f}(t) = (cos(t), sen(t))$;

b) $\vec{f}(t) = \left(3t^4, 2t^7, \dfrac{1}{t^3}\right)$;

c) $\vec{f}(t) = \left(6t^2\sqrt[3]{t}, 4t^3 + t^2, t^3(2t^2 - 3)\right)$;

d) $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-4t}, \sqrt[3]{6-2t}, t\sqrt{t^2 - 9}\right)$;

e) $\vec{f}(t) = \left(5t^{\frac{3}{2}}, 10\sqrt[3]{t^2}, \left(4cossec(t)\,cotg(t) + 2sec^2(t)\right)\right)$;

Exercício 1.8.2 *Calcule o valor de cada uma das integrais abaixo.*

a) $\displaystyle\int_0^{pi} \left(4sen(t), 6cos(t), e^t\right) dt$;

b) $\displaystyle\int_2^{5} \left(4, 6t, t^2\right) dt$;

c) $\displaystyle\int_2^{-3} \left(1, \sqrt{t}, \frac{t^2+1}{t^2}\right) dt$;

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(sen(2t), t^2\sqrt{t^3+1}, \frac{t^3+1}{t+1}\right) dt$.

e) $\displaystyle\int_0^{3} \left(3t^2 - 4t + 1, (t-3)^3, t^2 - 2t\right) dt$;

f) $\displaystyle\int_2^{4} \left(\sqrt{2t-4}, \frac{t}{(2t^2-5)^3}, 3t\sqrt{16-t^2}\right) dt$;

Exercício 1.8.3 *Calcule as integrais indefinidas de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3-2t}, \frac{3t}{t^2+4}, \frac{3t^2}{5t^3-1}\right) dt$;

b) $\displaystyle\int \left(\frac{\cos(t)}{1+2sen(t)}, cotg(5t) + cossec(5t), \frac{2t^3}{t^2-4}, \frac{1}{t\ln(t)}\right)$.

c) $\displaystyle\int \left(e^{2-5t}, \frac{1+e^{2t}}{e^t}, \frac{e^{3t}}{(1-2e^{3t})^2}\right) dt$;

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2t}{t^2-5}, \frac{2t+3}{t+1}, \frac{t}{t\ln^2 t} \right);$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t}, \frac{\ln(|t|)}{t}, te^{4-t^2} \right) dt;$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t\ln^2 t}, \frac{e^t}{e^t+2} \right) dt.$