Capítulo 1

Coordenadas Cartesianas e Vetores

Nesse capítulo faremos um estudo de *Coordenadas* e de *Vetores*. O estudo de coordenadas será feito na Seção 1.1. Já na Seção 1.3 e na Seção 1.5 estudaremos vetores e algumas das operações relacionados a vetores. Depois estudaremos três tipos de produtos relacionados a vetores, sendo eles: o *Produto Escalar* (Seção 1.7),o *Produto Vetorial* (Seção 1.9) e o *Produto Misto* (Seção 1.11). Iniciemos com o estudo de coordenadas.

1.1 Coordenadas no Plano Real Unidimensional, Bidimensional e Tridimensional

Iniciaremos essa seção estudando o *Espaço Unidimensional*, ou seja, estudando a *Reta Numérica*.

Definição 1.1.1 *Uma Reta Orientada é qualquer reta r com um sentido de crescimento fixado. O sentido de crescimento de r é definido como sendo o Sentido Positivo de r.*

Definição 1.1.2 *Um Eixo é uma reta orientada r no qual se fixa um ponto O chamado de Origem.*

Exemplo 1.1.1 *Na Figura 1.1 é apresentada a ilustração de retas orientadas, sendo que em (b) temos um eixo.*

(a) reta orientada (b) eixo

Figura 1.1: Ilustração de uma reta orientada e um eixo.

■

Observação 1.1.1 *O Sentido Oposto de crescimento de um eixo é chamado de Sentido Negativo. Além disso, dizemos que um ponto B está à Direita de um ponto A, ou que o ponto A está à Esquerda do ponto B, se o sentido de percurso de A para B for o sentido positivo.*

Exemplo 1.1.2 *Na Figura 1.2 é ilustrado um eixo, cujo sentido de crescimento é da esquerda para a direita. Além disso, temos que o ponto B está à direita do ponto A nesse eixo.*

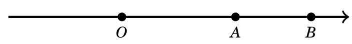

Figura 1.2: Ilustração de uma reta orientada e um ponto B à direita de um ponto A nesse eixo.

■

Definição 1.1.3 *Sejam X e Y dois pontos de um eixo r. Definimos como sendo a Distância entre X e Y, denotado por $d(X,Y)$, ao número real que satisfaz as seguintes condições:*

a) $d(X,Y) \geq 0$;

b) $d(X,Y) = d(Y,X)$;

c) Para dos os pontos X, Y e Z de r, se Y está entre X e Z, então,

$$d(X,Z) = d(X,Y) + d(Y,Z).$$

Observação 1.1.2 *Todo eixo r pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. A origem do eixo faz-se corresponder com o número zero. Dessa forma, cada ponto X do eixo r à direita de O corresponde ao número positivo $x = d(O,X)$ que é dado pela medida da distância entre O e X. Por outro lado, os pontos X situados à esquerda de O correspondem aos números negativos, sendo esse dado por $x = -d(O,X)$, onde $d(O,X)$ é o valor da medida da distância entre os pontos O e X.*

Agora, vamos associar o valor numérico relacionado com o ponto de forma biunívoca com o ponto.

Definição 1.1.4 *O único número real x que corresponde biunivocamente a cada ponto X de um eixo r é chamado de Coordenada do ponto X.*

Exemplo 1.1.3 *Seja r um eixo. Dessa forma, o ponto O tem coordenada zero. Além disso, todos os pontos X de r localizados à esquerda de O tem coordenada negativa e todos os pontos X à direita de O tem coordenada positiva, como ilustrado na Figura 1.3.*

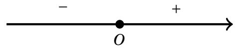

Figura 1.3: Ilustração da posição dos pontos de coordenadas positivas ou negativa sobre um eixo.

■

Proposição 1.1.1 *Sejam X e Y dois pontos de um eixo r com coordenadas x e y, respectivamente. Dessa forma, a distância entre X e Y fica dada por*

$$d(X,Y) = |x - y| = |y - x|.$$

Demonstração: Se $X = Y$, então, não há nada para se provar. Suponha, inicialmente, que X está à esquerda de Y, ou seja, que $x < y$. Nessa situação, temos três condições a se considerar:

a) X está entre O e Y e, consequentemente, $0 < x < y$;

b) Y está entre O e X e, consequentemente, $x < y < 0$;

c) O está entre X e Y e, consequentemente, $x < 0 < y$;

Para o caso a), temos que $d(O,X) = x$ e que $d(O,Y) = y$. Além disso, como X está entre O e Y, segue que $d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y)$. Consequentemente,

$$d(X,Y) = d(O,Y) - d(O,X) = y - x = |y - x|, \text{ pois } y - x > 0.$$

Para o caso b), temos que $d(O,X) = -x$ e que $d(O,Y) = -y$. Além disso, como Y está entre O e X, segue que $d(O,X) = d(X,Y) + d(O,Y)$. Consequentemente,

$$d(X,Y) = d(O,X) - d(O,Y) = -x - (-y) = y - x = |y - x|, \text{ pois } y - x > 0.$$

Por fim, para o caso c), temos que $d(O,X) = -x$ e que $d(O,Y) = y$. Como O está entre X e Y, segue que $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = d(O,X) + d(O,Y)$. Consequentemente,

$$d(X,Y) = d(O,X) + d(O,Y) = -x + y = y - x = |y - x|, \text{ pois } y - x > 0.$$

Portanto, para todas as situações, temos que $d(X,Y) = |y - x|$. A demonstração do caso onde X está à direita de Y é análoga e, por isso, é deixada como exercício. ■

Observação 1.1.3 *Uma consequência da Proposição 1.1.1 é que se X e Y são pontos do plano com coordenadas x e y, respectivamente, então, $d(X,Y) = x - y$ quando X está à direita de Y (ou seja, quando $x \geq y$) e $d(X,Y) = y - x$ quando X está à esquerda de Y (ou seja, quando $x \leq y$).*

Agora vamos apresentar um pouco a *Simetria* entre dois pontos.

Definição 1.1.5 *Sejam A, X e Y três pontos de um eixo r com coordenadas a, x e y, respectivamente. Dizemos que Y é o ponto Simétrico de X relativamente a A, quando A é o ponto médio do segmento de reta $\overline{XY}$.*

Exemplo 1.1.4 *Sejam A, X e Y três pontos de um eixo r com coordenadas a, x e y, respectivamente. Suponha que Y seja o ponto simétrico de X relativamente a A. Dessa forma, temos que $a = \dfrac{x+y}{2}$. Sem perda de generalidade, suponha que $x < y$. Assim, temos $x < a < y$ e, além disso, temos que*

$$y = 2a - x.$$

■

Definição 1.1.6 *Sejam A, X e Y três pontos de um eixo r com coordenadas a, x e y, respectivamente. A função $s : r \to r$ que associa a todo ponto X de r ao seu simétrico Y em relação ao ponto A é chamada de Simetria, ou Reflexão, em torno do ponto A.*

Exemplo 1.1.5 *Seja r um eixo de origem O e seja X um ponto de r de coordenada x. Assim, a função $s : r \to r$ dada por $s(X) = -x$ é uma reflexão em torno do ponto O.*
De fato: *Temos que O tem coordenada 0 e, por isso, $s(X) = 2 \times 0 - x = -x$.* $\square$

$\blacksquare$

Observação 1.1.4 *Sejam X e Y dois pontos de um eixo r de coordenadas x e y, respectivamente. Seja $s : r \to r$ uma função reflexão em torno do ponto A de r de coordenada a. Assim, do Exemplo 1.1.4 temos que $s(X) = 2a - x$ e $s(Y) = 2a - y$. Consequentemente,*

$$d(s(X), s(Y)) = |(2a - x) - (2a - y)| = |y - x| = d(X, Y).$$

Em outras palavras, a função reflexão $s : r \to r$ preserva distância em r, ou seja, a distância entre dois reflexos $s(X)$ e $s(Y)$, em relação a um ponto A, é igual a distância entre os pontos X e Y.

Definição 1.1.7 *Seja X um ponto de um eixo r, com coordenada x, e seja a um número real. A função $t : r \to r$ que associa a todo ponto $X \in r$ de coordenada x ao número real $t(X) = x + a$ é chamada de Translação.*

Exemplo 1.1.6 *Mostre que uma função translação preserva distâncias.*

Solução: Seja $t : r \to r$ a função translação que associa a todo ponto $X \in r$ de coordenada x ao número real $t(X) = x + a$. Assim, se $Y \in r$ tem coordenada y, segue que

$$d(t(X), t(Y)) = |(x + a) - (y + a)| = |x - y| = |y - x| = d(X, Y).$$

Portanto, a função translação $t : r \to r$ preserva distância em r. $\blacksquare$

Agora vamos apresentar o *Plano Euclidiano Bidimensional*, ou seja, vamos estudar o *Plano Real*. Comecemos apresentando a sua definição.

Definição 1.1.8 *O Plano Real, ou o Plano Euclidiano Bidimensional, denotado por $\mathbb{R}^2$, é definido por todos os Pares Ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $x, y \in \mathbb{R}$. A coordenada x do par ordenado (x, y) é chamada de Abscissa (ou Primeira Coordenada) e y é chamado de Ordenada (ou Segunda Coordenada).*

Definição 1.1.9 *Sejam (a, b) e (x, y) dois pares ordenados do $\mathbb{R}^2$. Então, temos que*

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ e } b = y.$$

Exemplo 1.1.7 *Observe que os pares ordenados $P = (2, 3)$ e $Q = (3, 2)$ são diferentes, visto que a primeira coordenada de P é diferente da primeira coordenada de Q.*

Definição 1.1.10 *Considere dois eixos ortogonais OX e OY num plano α e seja O o ponto de interseção entre eles, como visto na Figura 1.4.*

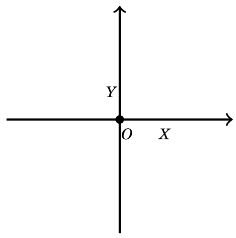

Figura 1.4: Ilustração de um Eixo Cartesiano no Plano Real.

O eixo horizontal é chamado de Eixo das Abscissas e o eixo vertical é o Eixo das Ordenadas. Esse sistema de eixos é chamado de Eixo Cartesiano.

Observação 1.1.5 *a) O eixo das abscissas tem sentido de crescimento da esquerda para a direita e que o eixo das ordenadas tem sentido de crescimento de baixo para cima.*

b) Sendo o ponto O a origem do sistema, temos que O fica dado pelo par ordenado $O = (0,0)$.

c) Um plano α munido de um sistema de eixo ortogonal estabelece de forma natural uma correspondência biunívoca com o $\mathbb{R}^2$, como descrito a seguir.

Seja P um ponto do plano. Tome x como sendo a projeção do ponto P sobre o eixo das abscissas e seja y a projeção de P sobre o eixo das ordenadas, como visto na Figura 1.5.

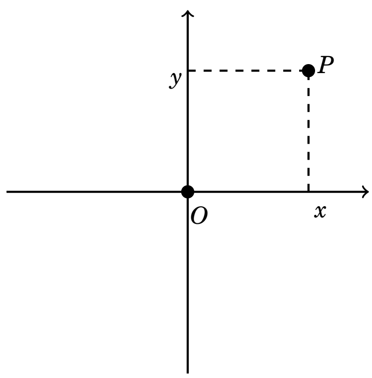

Figura 1.5: Ilustração da obtenção das coordenadas de um ponto P no sistema de eixo cartesiano.

Nessas condições, dizemos que o ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema de eixos escolhido.

d) A partir de agora, caso não seja feita menção explícita do contrário, sempre usaremos um sistema de eixos coordenados ortogonais e, por isso, todo ponto P do plano pode ser identificado como sendo um par ordenado (x, y) de números reais.

Definição 1.1.11 *Um sistema de eixo ortogonal divide o plano em quatro regiões, chamadas de Quadrantes.*

Observação 1.1.6 *Cada um dos quadrantes definido por um sistema de eixos coordenados ortogonais é numerado como a seguir:*

- 1^o *Quadrante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva e ordenada positiva, ou seja,* $x > 0$ *e* $y > 0$*;*
- 2^o *Quadrante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa e ordenada positiva, ou seja,* $x < 0$ *e* $y > 0$*.*
- 3^o *Quadrante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa e ordenada negativa, ou seja,* $x < 0$ *e* $y < 0$*;*
- 4^o *Quadrante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva e ordenada negativa, ou seja,* $x > 0$ *e* $y < 0$*;*

Dessa forma, os quadrantes ficam estabelecidos como visto na Figura 1.6.

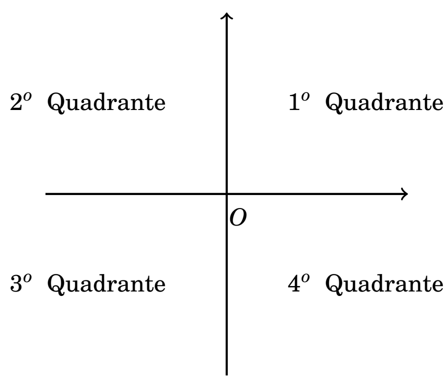

Figura 1.6: Ilustração da posição dos quadrantes definidos por um sistema de eixos cartesianos ortogonais.

Além disso, observe que todos os pontos sobre o eixo das abscissas possuem ordenada nula e, por isso, são da forma $(x,0)$*. Analogamente, todos os pontos sobre o eixo das ordenadas possuem abscissa nula e, por isso, são da forma* $(0,y)$*. Consequentemente, como* O *pertence a ambos os eixos, segue que* $O = (0,0)$*.*

Dados dois pontos $P = (x,y)$ e $Q = (a,b)$ do $\mathbb{R}^2$, vamos estabelecer uma forma de calcular a distância entre P e Q, denotada por $d(P,Q)$. Para isso, considere o ponto $R = (a,y)$, ou seja, o ponto de mesma abscissa que o ponto Q e mesma ordenada que o ponto P, como visto na Figura 1.7.

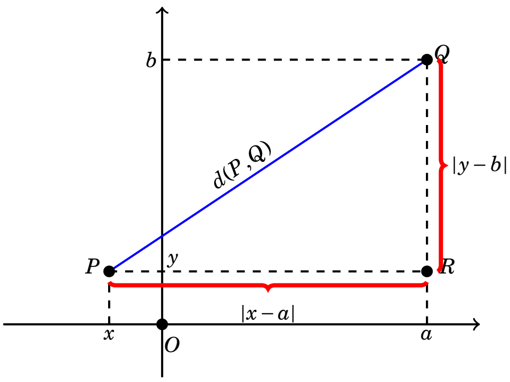

Figura 1.7: Ilustração utilizada na construção da fórmula de cálculo da distância entre dois pontos no plano.

Como $\overline{PR} \parallel OX$ e $\overline{RQ} \parallel OY$, segue que $\hat{R}$ é um ângulo reto e, consequentemente, do Teorema de Pitágoras, temos que $(d(P,Q))^2 = (d(P,R))^2 + (d(R,Q))^2 = (|x-a|)^2 + (|y-b|)^2$, ou seja, a distância entre os pontos P e Q fica dada por

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Estenderemos a ideia da construção de correspondência dos pontos do plano com o $\mathbb{R}^2$ para o *Espaço Euclidiano Tridimensional* $\mathbb{R}^3$, como descrito a seguir. Comecemos apresentando a definição do espaço euclidiano.

Definição 1.1.12 *O Espaço Euclidiano Tridimensional, denotado por* $\mathbb{R}^3$, *é definido por todos as Triplas Ordenadas* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *tais que* $x,y,z \in \mathbb{R}$. *A coordenada* x *do terno ordenado* (x,y,z) *é chamada de Abscissa (ou Primeira Coordenada),* y *é chamada de Ordenada (ou Segunda Coordenada) e* z *é chamada de Cota (ou Terceira Coordenada).*

A definição de igualdade segue como sendo uma extensão da dada para os pares ordenados, como veremos a seguir.

Definição 1.1.13 *Sejam* (a,b,c) *e* (x,y,z) *duas triplas ordenadas do* $\mathbb{R}^3$. *Então, temos que*

$$(a,b,c) = (x,y,z) \Leftrightarrow a = x, \; b = y \text{ e } c = z.$$

Definição 1.1.14 *Considere três eixos ortogonais dois a dois, OX, OY e OZ no espaço tridimensional e seja O o ponto de interseção entre eles, como visto na Figura 1.8.*

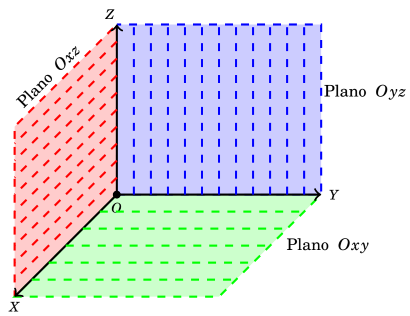

Figura 1.8: Ilustração de um Eixo Cartesiano no Espaço Euclidiano Tridimensional.

O eixo Ox é chamado de Eixo das Abscissas, o eixo Oy é o Eixo das Ordenadas e o eixo Oz é o Eixo das Cotas. Esse sistema de eixos é chamado de Eixo Cartesiano Tridimensional.

Observação 1.1.7 *a) Sendo o ponto O a origem do sistema, temos que O fica dado pelo terno ordenado $O = (0,0,0)$.*

b) Temos que o plano Oxy é formado por todos os pontos da forma $(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$. Analogamente, todos os pontos do plano Oyz são da forma $(0,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e todos os pontos do plano Oxz são da forma $(x,0,z) \in \mathbb{R}^3$.

c) O espaço tridimensional, munido de um sistema de eixo ortogonal, fica estabelecido de forma similar ao obtido para o sistema bidimensional e, por isso, aparece de forma natural uma correspondência biunívoca com o $\mathbb{R}^3$, como descrito a seguir.

Seja P um ponto do espaço. Seja R a projeção de P sobre o plano Oxy. Além disso, considere como sendo x a projeção do ponto R sobre o eixo das abscissas e seja y a projeção de R sobre o eixo das ordenadas. Além disso, considere z como sendo a projeção de P sobre o eixo das cotas, como visto na Figura 1.9.

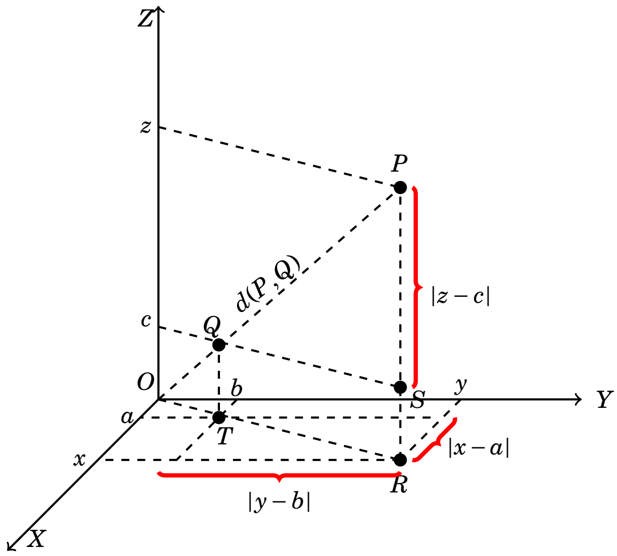

Figura 1.9: Ilustração de um Eixo Cartesiano no Espaço Real.

Nessas condições, dizemos que o ponto P tem coordenadas (x,y,z) no sistema de eixo escolhido. Analogamente, podemos obter as coordenadas de um ponto Q qualquer do plano, digamos que sejam (a,b,c). Dessa forma, da Figura 1.9 temos que

$$d(P,Q) = \sqrt{d(Q,S)^2 + d(P,S)^2}.$$

Como $d(Q,S) = d(T,R) = (|x-a|)^2 + (|y-b|)^2$, segue que

$$d(P,Q) = \sqrt{(|x-a|)^2 + (|y-b|)^2 + (|z-c|)^2}.$$

d) *Da mesma forma que no plano, se não for feita menção ao contrário, sempre usaremos um sistema de eixos coordenados ortogonais e, por isso, todo ponto P do espaço pode ser identificado como sendo uma tripla ordenada (x, y, z) de números reais.*

Definição 1.1.15 *Um sistema de eixo ortogonal divide o espaço em oito regiões, chamadas de Octantes.*

Observação 1.1.8 *Cada um dos quadrantes definido por um sistema de eixos coordenados ortogonais é numerado como a seguir:*

- 1^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva, ordenada positiva e cota positiva, ou seja,* $x > 0$, $y > 0$ *e* $z > 0$;
- 2^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa, ordenada positiva e cota positiva, ou seja,* $x < 0$, $y > 0$ *e* $z > 0$;
- 3^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa, ordenada negativa e cota positiva, ou seja,* $x < 0$, $y < 0$ *e* $z > 0$;
- 4^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva, ordenada negativa e cota positiva, ou seja,* $x > 0$, $y < 0$ *e* $z > 0$;
- 5^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva, ordenada positiva e cota negativa, ou seja,* $x > 0$, $y > 0$ *e* $z < 0$;
- 6^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa, ordenada positiva e cota negativa, ou seja,* $x < 0$, $y > 0$ *e* $z < 0$.
- 7^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa negativa, ordenada negativa e cota negativa, ou seja,* $x < 0$, $y < 0$ *e* $z < 0$;
- 8^o *Octante: é definido por todos os pontos de abscissa positiva, ordenada negativa e cota negativa, ou seja,* $x > 0$, $y < 0$ *e* $z < 0$;

Observação 1.1.9 *De agora em diante nos referiremos ao plano cartesiano apenas por plano e o espaço euclidiano por espaço. Também representaremos um ponto do plano ou do espaço por uma letra do alfabeto arábio maiúscula ou por suas coordenadas; as retas por letras do alfabeto arábico minúscula e os planos por uma legra do alfabeto grego.*

Existem outros tipos de sistemas para se estabelecer as coordenadas de um ponto no plano ou no espaço como, por exemplo, as sistemas para as *Coordenadas Polares*, *Esféricas* ou *Cilíndricas*, sendo que que serão estudadas a posteriori. Para essa parte inicial do curso, usaremos apenas o sistema de coordenadas cartesianas descritas nessa seção. Agora, faça alguns exercícios.

1.2 Exercícios

Exercício 1.2.1 *Mostre que a função reflexão* $s : r \to r$ *dada por* $s(X) = 2a - x$*, inverte a orientação dos pontos de um eixo* r*. Mostre também que a função reflexão possui um único ponto fixo, ou seja, que existe um ponto* $P \in r$ *tal que* $s(P) = P$*.*

Exercício 1.2.2 *Mostre que a função translação* $t : r \to r$ *dada por* $t(X) = x + a$*, não inverte a orientação dos pontos de um eixo* r*. Mostre também que a função translação não possui ponto fixo, ou seja, que não existe um ponto* $P \in r$ *tal que* $t(P) = P$*.*

Exercício 1.2.3 *Considere um hexágono* $ABCDEF$*, como ilustrado na Figura 1.10.*

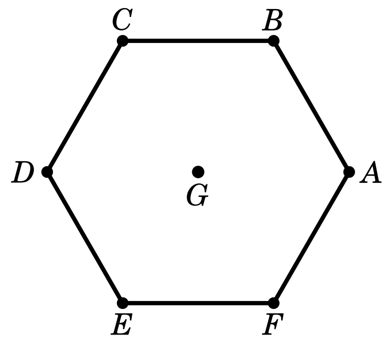

Figura 1.10: Ilustração do hexágono utilizado no Exercício 1.2.3.

Dessa forma, considerando que A *tem coordenadas* $(0,0)$ *que* B *tem coordenadas* $(1,0)$*, determine as coordenadas dos pontos* C*,* D*,* E*,* F *e* G*, sabendo que* G *é o centro do hexágono.*

Exercício 1.2.4 *Exiba as regiões a seguir num sistema de eixos ortogonais no plano cartesiano.*

a) $x \geq 0$;

b) $y < 0$;

c) $-3 \leq x < 2$;

d) $-1 < y \leq 4$;

e) $|x - 1| < 2$;

f) $|y + 1| \geq 5$;

g) $x > 2$ *e* $y \leq -2$;

h) $x \leq 0$ *e* $y \leq 0$;

i) $x > 0$ *e* $y > 0$.

Exercício 1.2.5 *Sabendo que os pontos* X*,* Y *e* Z *possuem, respectivamente, as coordenadas no plano cartesiano* $(0,0)$*,* $(m,8)$ *e* $(n,n+3)$*, e que* Z *é o ponto médio do segmento* $\overline{XY}$*, então, determine as coordenadas do ponto* $P = (m,n)$*.*

Exercício 1.2.6 *Seja* $Q = (?1,a)$ *um ponto do* 3^o *quadrante. Qual o valor de* a *para que se tenha* $d(P,Q) = 2$*, sendo* $P = (a,1)$ *e* $d(P,Q)$ *a distância entre os pontos* P *e* Q*.*

Exercício 1.2.7 *Exiba as regiões a seguir num sistema de eixos ortogonais no espaço euclidiano.*

a) $x > 0$, $y > 0$ *e* $z > 0$; *b)* $x < 0$ *e* $y > 1$; *c)* $-2 \leq x < 2$.

Exercício 1.2.8 *Calcule* $d(P,Q)$, *sendo a distância entre os pontos* P *e* Q *dados a seguir.*

a) $P = (2,2)$ *e* $Q = (1,-2)$;

b) $P = (-1,3)$ *e* $Q = (-2,-3)$;

c) $P = (0,-2)$ *e* $Q = (2,2)$;

d) $P = (1,-1)$ *e* $Q = (2,-1)$;

e) $P = (0,0)$ *e* $Q = (a,b)$;

f) $P = (-1,2,-3)$ *e* $Q = (2,1,4)$;

g) $P = (0,-1,0)$ *e* $Q = (2,3,0)$;

h) $P = (0,0,0)$ *e* $Q = (x,y,z)$.