1.5 Limites de Funções reais de várias variáveis

Vamos apresentar agora a definição de limite de funções reais de várias variáveis reais. Essa definição é similar a definição de limite de funções reais de uma variável real, diferenciando uma da outra apenas nas adaptações necessárias.

Definição 1.5.1 *Seja f uma função real definida numa bola $B(A;r) \subset \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A. Então, o* ***Limite de*** *$f(P)$* ***quando*** *P* ***tende a*** *A é L, e escrevemos*

$$\lim_{P\to A} f(P) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < ||P - A|| < \delta$, então, $|f(P) - L| < \epsilon$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.5.1 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = k$, ou seja, f é a função constante. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Como $f(x,y) = k$, temos que $|f(x,y) - k| = |k - k| = 0$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ e qualquer δ, temos que se $0 < ||(a,b) - (x,y)|| < \delta$, então, $|f(x,y) - k| = 0 < \epsilon$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k.$$

■

O Exemplo 1.5.1 pode ser escrito de forma geral, ou seja, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(P) = k \in \mathbb{R}$, então, $\lim\limits_{P\to A} f(P) = k$, para todo $A \in \mathbb{R}^n$. Em outras palavras, o limite da função constante, funções com qualquer número de variáveis, é sempre a própria constante.

Para os próximos exemplos, observe que se $u, v \geq 0$, então, $u \leq u + v$ e, consequentemente, $\sqrt{u} \leq \sqrt{u+v}$. Por isso, para todo $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, como $|x_i - a_i| = \sqrt{(|x_i - a_i)^2}$, segue que para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$|x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - a_2)^2 + \cdots + (x_i - a_i)^2 + (x_n - a_n)^2} = ||P - A||.$$

Portanto, $|x_i - a_i| \leq ||P - A||$, para todo $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.5.2 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x$. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Como $f(x,y) = x$, segue que $|f(x,y) - a| = |x - a| \leq ||(x,y) - (a,b)||$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, considerando $\delta = \epsilon$, temos que se $0 < ||(a,b) - (x,y)|| < \delta$, então, $|f(x,y) - a| < \epsilon$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a.$$

■

Exemplo 1.5.3 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = y$. *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$, *para todo* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Solução: Como $f(x,y) = y$, segue que $|f(x,y) - b| = |y - b| \leq ||(x,y) - (a,b)||$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, considerando $\delta = \epsilon$, temos que se $0 < ||(a,b) - (x,y)|| < \delta$, então, $|f(x,y) - b| < \epsilon$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$$

■

Usamos uma função f de duas variáveis reais nos Exemplos 1.5.2 e 1.5.3. Contudo, poderíamos ter usado uma função real de n variáveis que o resultado se manteria, ou seja, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \cdots, x_n) = x_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, $\lim\limits_{P\to A} x_i = a_i$, para todo $A = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.5.4 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = 2x + 3y$. *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 11$.

Solução: Sendo 11 o valor do limite da função $f(x,y) = 2x + 3y$, quando $(x,y) \to (1,3)$, precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$, então, $|(2x + 3y) - 11| < \epsilon$. Observe que:

$$|(2x + 3y) - 11| = |2x - 2 + 3y - 9| \leq |2x - 2| + |3y - 9|,$$

daí:

$$|(2x + 3y) - 11| \leq 2|x - 1| + 3|y - 3|.$$

Por outro lado, temos que

$$|x - 1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$$

e

$$|y - 3| = \sqrt{(y-3)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = ||(x,y) - (1,3)|| < \delta.$$

Assim,

$$|(2x + 3y) - 11| \leq 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta = 5\delta.$$

Portanto, tomado $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, temos que se $0 < ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$, então,

$$|(2x + 3y) - 11| < 5\delta = 5.\frac{\epsilon}{5} = \epsilon,$$

e, consequentemente,

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x + 3y) = 11.$$

■

Exemplo 1.5.5 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 3x^2+y$. Use a definição de limite para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 5$.*

Solução: Como o valor do limite é 5, para função $f(x, y) = 3x^2+y$, quando $(x, y) \to (1, 2)$, precisamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < ||(x, y) - (1, 2)|| < \delta$, então, $|(3x^2 + y) - 5| < \epsilon$. Observe que:

$$|(3x^2 + y) - 5| = |3x^2 - 3 + y - 2| \leq |3x^2 - 3| + |y - 2|.$$

Como $(x, y) \to (1, 2)$, então, temos que $||(x, y)-(1, 2)|| \to 0$, ou seja, estamos interessados em estudar o que acontece próximo de $(1, 2)$ e, por isso, δ é um número pequeno, razão essa que nos permite considerar, por exemplo, que $\delta \leq 1$. Sabendo que

$$|x - 1| = |(x - 1)^2 \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = ||(x, y) - (1, 2)|| < \delta$$

e considerando $\delta \leq 1$, temos que

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x+1 < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow |x+1| < 3.$$

Logo,

$$|3x^2 + y - 5| \leq 3|x - 1| \cdot |x + 1| + |y - 2| < 3.3|x - 1| + |y - 2|$$

e, por isso,

$$|3x^2 + y - 5| < 9.\delta + \delta = 10\delta.$$

Considerando $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{10}, 1\right\}$, segue que se $0 < ||(x, y)-(1, 2)|| < \delta$, então,

$$|3x^2 + y - 5| < 10\delta = 10\frac{\epsilon}{10} = \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 5.$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.5.6 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Por que?*

Solução: Suponha que tal limite existe, digamos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < ||(x, y) - (0, 0)|| < \delta$, então, $|f(x, y) - L| < \epsilon$. Contudo, observe que $f(0, y) = -1$, para todo $y \in \mathbb{R}$, tal que $y \neq 0$. Por outro lado, $f(x, 0) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0$. Daí, para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, como $|f(x, y) - L| < \epsilon$, temos que, para $x = 0$:

$$|f(0, y) - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow | - 1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -L < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}.$$

Analogamente, para $y = 0$:

$$|f(x,0) - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2},$$

gerando uma contradição. Portanto, não existe limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ■

Os últimos dois exemplos já devem ter te convencido da necessidade de encontrar propriedades que tornem o cálculo de limites uma tarefa mais simples, visto que tentar encontrar estimadores para δ, como no Exemplo 1.5.5, ou provar que o limite não existe, como no Exemplo 1.5.6, em funções com expressões complexas, pode não ser uma tarefa tão fácil. Sendo assim, apresentaremos agora um conjunto de teoremas nesse sentido, teoremas esses muitos similares aos apresentados no estudo de funções reais de uma variável real.

Teorema 1.5.1 *Sejam f e g funções reais definidas numa bola $B(A;r) \subset \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A, tais que $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L$ e $\lim\limits_{P\to A} g(P) = M$. Seja também $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então,*

a) $\lim\limits_{P\to A} (f(P) \pm g(P)) = L \pm M$;

b) $\lim\limits_{P\to A} f(P) \cdot g(P) = L \cdot M$;

c) $\lim\limits_{P\to A} kf(P) = kL$;

d) $\lim\limits_{P\to A} \dfrac{f(P)}{g(P)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$;

e) $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{P\to A} (f(P) - L) = 0$;

f) $\lim\limits_{(x_1,\cdots,x_n)\to(a_1,\cdots,a_n)} f(x_1,\cdots,x_n) = \lim\limits_{(h_1,\cdots,h_n)\to(0,\cdots,0)} f(a_1 - h_1,\cdots,a_n - h_n)$.

Demonstração: Exercício. ■

O Teorema 1.5.1 nos apresenta um conjunto de propriedades familiares do estudo de limite de funções reais de uma variável real, ou seja, limite da soma é igual a soma dos limites, limite do produto é igual ao produtos dos limites, limite do quociente é o quociente do limite, desde que o limite do denominador seja diferente de zero. Também já tínhamos visto que o limite da constante é a própria constante e que o limite de uma variável é o valor da variável aplicado no ponto. As propriedades se mantem, o que muda é a cara dos elementos do domínio da função. Também é importante observar que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = \lim\limits_{x\to a} x$ e que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = \lim\limits_{y\to b} y$. Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.5.7 *Calcule o valor dos limites das funções a seguir:*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left(x^3 - 4xy^2 + 5y - 7\right)$; *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$.

Solução:

a) Usando as propriedade de limite temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(x^3 - 4xy^2 + 5y - 7\right) = \lim_{x\to 2} x^3 - 4\lim_{x\to 2} x \lim_{y\to -3} y^2 + 5\lim_{y\to -3} -7 =$$

$$= 2^3 - 4\cdot 2\cdot(-3)^2 + 5\cdot(-3) - 7 = 8 - 72 - 15 - 7 = -86.$$

b) Temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 = 0.$$

$\blacksquare$

Agora vamos estudar outros teoremas que serão úteis no cálculo de limite de funções reais de várias variáveis. Comecemos com uma consequência do Teorema 1.5.1.

Teorema 1.5.2 *Sejam $f_1, \cdots, f_m$ funções reais definidas numa bola $B(A; r) \subset \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A, tais que $\lim\limits_{P\to A} f_1(P) = L_1, \cdots,$ $\lim\limits_{P\to A} f_m(P) = L_m$. Então,*

a) $\lim\limits_{P\to A} \left(f_1(P) \pm \cdots \pm f_m(P)\right) = L_1 \pm \cdots \pm L_m$.

b) $\lim\limits_{P\to A} \left(f_1(P) \cdot (\cdots) \cdot f_m(P)\right) = L_1 \cdot (\cdots) \cdot L_m$.

c) $\lim\limits_{P\to A} \left(f_1(P)\right)^m = L_1^m$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Exercício. $\blacksquare$

Teorema 1.5.3 *Seja f uma função real definida numa bola $B(A, r) \in \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente no próprio ponto A. Se $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L$ e $\lim\limits_{P\to A} f(P) = M$, então, temos que $L = M$, ou seja, se o limite existe, então, ele é único.*

Demonstração: Exercício. $\blacksquare$

Teorema 1.5.4 ***(Teorema do Confronto** ou **Teorema do Sanduíche)*** *Suponha que as funções f, g e h sejam funções reais definidas numa bola $B(A, r) \in \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A. Suponha também que $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$, $\forall\ P \in B(A, r) \setminus \{A\}$ e que $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L = \lim\limits_{P\to A} h(P)$. Então, nessas condições, temos que*

$$\lim_{P\to A} g(P) = L.$$

Demonstração: Não será feito nessas notas. $\blacksquare$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.5.8 *Calcule cada um dos limites a seguir.*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$; *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{sen(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$;

Solução:

a) Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x-xy+3) = \lim_{x\to 0}(x) - \lim_{x\to 0}(x)\cdot\lim_{y\to 1}(y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}(3) = 0-0\cdot 1+3 = 3.$$

Por outro lado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2y + 5xy - y^3) = \left(\lim_{x\to 0}(x)\right)^2 \cdot \lim_{y\to 1}(y)+$$

$$+5\cdot\lim_{x\to 0}(x)\cdot\lim_{y\to 1}(y) - \left(\lim_{y\to 1}(y)\right)^3 = 0^2\cdot 0 + 5\cdot 0\cdot 1 - 1^3 = -1.$$

Assim, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x - xy + 3)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2y + 5xy - y^3)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

b) Considere $u = x^2 + y^2 + z^2$. Dessa forma, tendo que $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$, então, $x \to 0$, $y \to 0$ e $z \to 0$. Consequentemente, quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ temos que $u \to 0$. Logo, podemos reescrever $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{sen(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$ em função de u como $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u}$, que é um limite fundamental, ou seja, $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u} = 1$. Portanto,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{sen(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

c) Temos que $x^2 \geq 0$ e, consequentemente, $x^2+y^2 \geq y^2$, ou seja, $\dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$. Dessa forma, temos que

$$\left|\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| = |x| \left|\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |x| \cdot 1 \Rightarrow -|x| \leq \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

e, dessa forma, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|x| = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|$, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

■

Teorema 1.5.5 *Seja g uma função real definida numa bola $B(A,r) \in \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A, tal que*

$$\lim_{P \to A} g(P) = b.$$

Seja $f : C \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $b \in C$. Nessas condições, temos que

$$\lim_{P \to A} (f \circ g)(P) = f(b).$$

Ou seja,

$$\lim_{P \to A} f\left(g(P)\right) = f\left(\lim_{P \to A} g(P)\right).$$

Demonstração: Não faremos nessas notas. ∎

Exemplo 1.5.9 *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1)$.

Solução: Seja g a função dada por $g(x,y) = xy - 1$ e seja f a função dada por $f(t) = \ln(t)$. Como a função f é contínua, temos que as hipóteses do Teorema 1.5.5 estão satisfeita, assim:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy-1)\right) = \ln(1) = 0.$$

∎

Teorema 1.5.6 *Sejam f e g funções reais definida numa bola $B(A,r) \in \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A. Se $\displaystyle\lim_{P\to A} f(P) = 0$ e se g é limitada, ou seja, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(P)| \leq M$, para todo $P \in B(A,r) \setminus \{A\}$, então,*

$$\lim_{P \to A} (f \cdot g)(P) = 0.$$

Demonstração: Exercício. ∎

Exemplo 1.5.10 *Calcule o valor do limite de cada uma das funções a seguir, se o mesmo existir.*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(x)}{x^2+|y|}$.

Solução:

a) Observe que $\dfrac{x^3}{x^2+y^2} = x \cdot \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Como $x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, temos que $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitado. Além disso, tendo que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x) = 0$, segue do Teorema 1.5.6 que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

b) Temos que $|sen(*)| \leq 1$, para todo $* \in \mathbb{R}$. Assim, $sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ é uma função limitada. Sendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x) = 0$, segue do Teorema 1.5.6 que

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

c) Temos que

$$\left|\frac{xy\cos(x)}{x^2+|y|}\right| = |x| \cdot |\cos(x)| \cdot \frac{|y|}{x^2+|y|}.$$

Sabendo que $|\cos(x)| \leq 1$ e que $\dfrac{|y|}{x^2+|y|} \leq 1$ (pois $|y| \leq x^2+|y|$), temos que $|\cos(x)| \cdot \dfrac{|y|}{x^2+|y|}$ é limitado, pois é o produto de duas funções limitadas. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} |x| = 0$, segue do Teorema 1.5.6 que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy\cos(x)}{x^2+|y|} = 0.$$

■

Teorema 1.5.7 ***(Conservação do Sinal)****: Seja f uma função real definida numa bola $B(A,r) \in \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A, tal que*

$$\lim_{P\to A} f(P) = L > 0.$$

Então, existe $\delta > 0$, tal que $\forall\ P \in B(A,\delta) \setminus \{A\}$, temos que $f(P) > 0$.

Demonstração: Exercício. ■

O Teorema 1.5.7 é muito utilizado para garantir que não haja a inversão de sinal de uma função numa determinada região. Esse resultado será importante nas seções a seguir. Agora, antes de continuarmos com o limite de funções reais de várias variáveis, vamos definir o que chamaremos de *Caminho* num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 1.5.2 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então, um* ***Caminho*** *em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $F : I \to \mathbb{R}^n$. As únicas funções $f_i : I \to \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tais que $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$ são chamadas de* ***Funções Coordenadas*** *(ou* ***Funções Componentes****) da aplicação F.*

■

Exemplo 1.5.11 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por*

$$F(t) = (t, 2t).$$

Temos que $F(-1) = (-1,-2)$, $F(0) = (0,0)$ e que $F(1) = (1,2)$. Na verdade, como $x = t$, então, temos que $y = 2x$, ou seja, o caminho dado pela aplicação F coincide com o gráfico da reta $y = 2x$.

■

Exemplo 1.5.12 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por*

$$F(t) = (t, t^2).$$

Como $x = t$, segue que $y = x^2$, ou seja, o caminho dado pela aplicação F coincide com a parábola $y = x^2$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.5.13 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por*

$$F(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)).$$

Como $x^2 = \cos^2(t)$ e $y^2 = \text{sen}^2(t)$, segue que $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, o caminho dado pela aplicação F coincide com a circunferência de centro na origem e raio $r = 1$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.5.14 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por*

$$F(t) = (2\cos(t), \text{sen}(t)).$$

Como $x^2 = 4\cos^2(t)$ e $y^2 = \text{sen}^2(t)$, segue que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, ou seja, o caminho dado pela aplicação F coincide com a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

$\blacksquare$

De um modo geral, estamos acostumados com curvas planas (circunferências, elipses, hipérboles, retas, etc.). Contudo, existem curvas que não estão contidas no plano, como a que será apresentada a seguir.

Exemplo 1.5.15 *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a aplicação dada por*

$$F(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t).$$

*Essa aplicação é chamada de **Hélice Circular**. As funções coordenadas de F são: $f_1(t) = \cos(t)$, $f_2(t) = \text{sen}(t)$ e $f_3(t) = t$. F é um caminho em $\mathbb{R}^3$. Um esboço desse caminho pode ser visto na Figura 1.20*

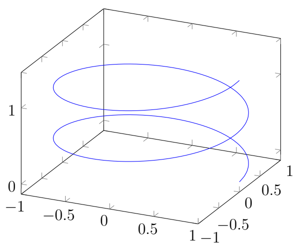

Figura 1.20: Ilustração da Hélice Circular Reta, dada por $F(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$.

$\blacksquare$

Observação 1.5.1 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então, uma aplicação $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pode ser vista como um tipo de "vetor", onde cada uma das coordenadas é uma função. Consequentemente, mesclando operações com vetores e, em cada coordenada as operações de funções, ficam estabelecidas todas as operações para essas aplicações como, por exemplo, às apresentadas na Definição 1.1.2.*

■

Agora, vamos na direção de verificar se uma determinada função real de várias variáveis não tem limite num determinado ponto. Para isso, vamos reescrever a definição de limite de funções reais de várias variáveis, utilizando a noção de ponto de acumulação, como apresentado a seguir.

Definição 1.5.3 *Seja f uma função real que está definida num conjunto S em $\mathbb{R}^n$, e seja $A \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de S. Então, se $P \in S$, o* ***Limite de** $f(P)$ **quando** P **tende a** A **em** S **é** L, e escrevemos*

$$\lim_{\substack{P \to A \\ P \in S}} f(P) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < ||P - A|| < \delta$, então, $|f(P) - L| < \epsilon$, para $P \in S$.

■

Observe que na Definição 1.5.3, o conjunto S pode ser substituído por um caminho que contenha o ponto de acumulação A. O resultado a seguir vai nos garantir que calculando o limite por caminhos diferentes, obtemos valores diferentes, então, o limite não existe.

Teorema 1.5.8 *Seja f uma função real definida numa bola $B(A; r) \subset \mathbb{R}^n$ exceto, possivelmente, no próprio ponto A, mas seja A um ponto de acumulação de f em B. Se a função f tiver limites diferentes quando $P \to A$ através de dois caminhos distintos, então, $\lim_{P \to A} f(P)$ não existe.*

Demonstração: Exercício. ■

O Teorema 1.5.8 nos diz que se obtemos valores diferentes por dois caminhos distintos para um ponto de acumulação A, então, o limite da função f quando $P \to A$ não existe.

Para as funções reais de uma variável real só existem dois caminhos distintos para se chegar a um ponto a (por valores sempre menores do que o ponto a ou por valores sempre maiores do que a), surgindo assim os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente. Para funções reais de várias variáveis reais, um mesmo ponto pode ser alcançado por infinitos caminhos e, por isso, tentar provar que o limite existe dessa forma não é possível. Logo, essa ideia é usada apenas para provar que um determinado limite não existe, ou seja, encontrando dois caminhos que levam para valores diferentes de limites . Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.5.16 *Dada a função* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *se o limite existir.*

Solução: A função f está definida em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, exceto, na origem. Seja γ_1 o caminho formado pelo eixo das abscissas, ou seja,

$$\gamma_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere também que γ_2 seja o caminho formado pela reta $y = x$, ou seja,

$$\gamma_2 = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_1}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t.0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_2}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t.t}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, como

$$0 = \lim_{t\to 0} f(t,0) \neq \lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2},$$

segue que o limite em questão não existe. ■

Exemplo 1.5.17 *Dada a função* $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, *encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *se o limite existir.*

Solução: A função f está definida em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, exceto na origem. Seja γ_1 o caminho formado pelo eixo das abscissas, ou seja,

$$\gamma_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere também que γ_2 seja o caminho formado pelo eixo das ordenadas, ou seja,

$$\gamma_2 = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_1}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_2}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0-t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} -1 = -1.$$

Portanto, como

$$1 = \lim_{t\to 0} f(t,0) \neq \lim_{t\to 0} f(0,t) = -1,$$

segue que o limite em questão não existe. ■

Exemplo 1.5.18 *Dada a função* $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, *ache* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *se este existir.*

Solução: A função f está definida em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, exceto, na origem.Seja γ_1 o caminho formado pelo eixo das abscissas, ou seja,

$$\gamma_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere também que γ_2 seja o caminho formado pela parábola $y = x^2$, ou seja,

$$\gamma_2 = \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$\lim_{\substack{(x,y)\ \to\ (0,0)\\ (x,y)\ \in\ \gamma_1}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2.0}{t^4+0} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\ \to\ (0,0)\\ (x,y)\ \in\ \gamma_2}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2.t^2}{t^4+(t^2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, como

$$0 = \lim_{t\to 0} f(t,0) \neq \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \frac{1}{2},$$

segue que o limite em questão não existe. ■

Agora, faça alguns exercícios...... Bons estudos.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1 *Usando a definição de limite, mostre cada um dos limites a seguir.*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x+2y) = 8$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x-3y) = -17$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{x-y}{5} = 1$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} (x^2+y^2) = 8$.

Exercício 1.6.2 *Usando os teoremas de limite, calcule o limite dado.*

a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$;

b) $\lim_{(x,y)\to(-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$;

c) $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3x-2y}{x+4y}$;

d) $\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3+2y}$;

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{\cos(x)+\operatorname{sen}(y)}$;

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(y)}{e^{2x}+e^y}$;

g) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2}$;

h) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}} - (y-1)^{\frac{4}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}} - (y-1)^{\frac{2}{3}}}$;

i) $\lim_{(x,y,z)\to(-2,1,4)} (4x^2y - 3xyz^2 + 7y^2z^3)$;

j) $\lim_{(x,y,z)\to(0,2,0)} \dfrac{x^2y^2+y^2z^2}{x^2+z^2}$;

k) $\lim_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{3},1,\pi)} \dfrac{\sec(xy)+\sec(yz)}{y-\sec(z)}$;

l) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{(e^x+e^y+e^z)^2}{e^{2x}+e^{2y}+e^{2z}}$.

Exercício 1.6.3 *Dado a função f, prove que o limite $\lim_{P\to \boldsymbol{0}} f(P)$, onde $\boldsymbol{0}$ é o vetor nulo, não existe.*

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;

d) $f(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{x^4+y^4}$;

e) $f(x,y) = \dfrac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$;

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$;

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8}$;

h) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2z^2+yz^2}{x^4+y^2+z^4}$;

i) $f(x,y,z) = \dfrac{x^4+yz^3+z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$;

j) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$;

k) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$.

Exercício 1.6.4 *Usando o teorema de limite de funções composta, ache as funções f e g, verifique as hipóteses do teorema e calcule o valor do limite dado.*

a) $\lim_{(x,y)\to(\ln(3),ln(2))} e^{x-y}$;

b) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \arctan(\frac{y}{x})$;

c) $\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \mid 5x + \frac{1}{2}y^2 \mid$;

d) $\lim_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\dfrac{1}{3x-4x}}$.

Exercício 1.6.5 *Calcule os valores dos limites*

$$L_1 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \text{ e } L_2 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},$$

para cada uma das funções f a seguir:

a) $f(x,y) = 3x + 2y$;

b) $f(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^3$;

c) $f(x,y) = \dfrac{3x+2y}{x-y}$;

d) $f(x,y) = e^{3x+2y}$.