1.17 O Gradiente de Funções reais de várias variáveis

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Dessa forma, se $\mathbf{U} = (\cos(\theta), sen(\theta))$, então, temos que a derivada direcional fica dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos(\theta) + f_y(x, y)sen(\theta).$$

Considerando o vetor $(f_x(x, y), f_y(x, y))$, podemos reescrever a derivada direcional $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$ como sendo um produto escalar, ou seja,

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot (\cos(\theta), sen(\theta)).$$

No produto escalar apresentado acima temos um vetor formado pelas derivadas parciais, que será o motivador da próxima definição, e o vetor unitário **U**. O vetor formado pelas derivadas parciais, chamado de *Vetor Gradiente*, é de grande importância para a matemática e o mesmo será definido a seguir.

Definição 1.17.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e seja $P \in D$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P)$ existem, então, o* ***Vetor Gradiente*** *de f em P, denotado por $\nabla f(P)$, é definido por*

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right).$$

■

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função dada por $z = f(x, y)$, então, temos que ∇z pode ser reescrito por

$$\nabla z = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Consequentemente, a derivada direcional fica dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \nabla z \cdot U.$$

Por outro lado, se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função dada por $\omega = f(x, y, z)$, então, temos que $\nabla \omega$ pode ser escrito

$$\nabla \omega = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)).$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.17.1 *Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\nabla f(1, 1)$ e represente-o geometricamente.*

Solução: Temos que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e, por isso, $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$. Assim, uma representação do vetor $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$ é apresentada na Figura 1.17.

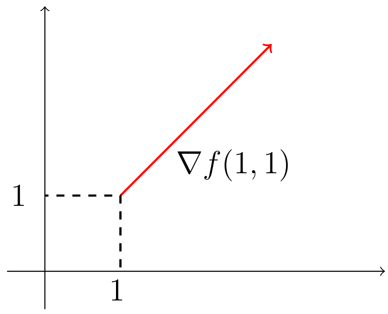

Figura 1.26: Representação do vetor $\nabla f(1,1)$ no Exemplo 1.17.1.

■

Exemplo 1.17.2 *Se* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9}$, *encontre o gradiente de* f *no ponto* $(4,3)$. *Encontre também a razão de variação de* $f(x,y)$ *na direção* $\dfrac{\pi}{4}$ *com o semi-eixo positivo* x, *no ponto* $(4,3)$.

Solução: Como $f_x(x,y) = \dfrac{x}{8}$ e $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{9}$, temos que $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{x}{8}, \dfrac{2y}{9}\right)$. Consequentemente, $\nabla f(4,3) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$. A razão de variação de $f(x,y)$ na direção $\dfrac{\pi}{4}$ em $(4,3)$ é dada por $D_{\mathbf{U}}f(4,3)$, onde

$$\mathbf{U} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim, como $D_{\mathbf{U}}f(4,3) = \nabla f(4,3) \cdot \mathbf{U}$, segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(4,3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

■

Uma interpretação geométrica para o vetor gradiente

Se α é a medida do ângulo (em radianos) entre os vetores $\nabla f(P)$ e $\mathbf{U}$, então, temos que $\nabla f(P) \cdot \mathbf{U}$ pode ser reescrito por

$$D_{\mathbf{U}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{U} = ||\nabla f(P)|| \cdot ||\mathbf{U}|| \cdot \cos(\alpha).$$

Como $||\mathbf{U}|| = 1$, segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = ||\nabla f(P)|| \cdot \cos(\alpha). \tag{1.8}$$

e sendo $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, segue da Equação 1.8, temos que $D_{\mathbf{U}}f(x,y)$ é máximo quando $\cos(\alpha) = 1$, ou seja, quando $\alpha = 0$. Entre outras palavras, $D_{\mathbf{U}}f(x,y)$ é máximo quando $\nabla f(P)$ estiver na mesma direção do vetor $\mathbf{U}$.

Portanto, o vetor gradiente de uma função f está apontando para a direção na qual a função tem a maior taxa de variação em P.

Em particular, sobre um mapa topográfico bidimensional de uma paisagem, onde z unidades é a elevação de um ponto x, y e $z = f(x, y)$, temos que a direção na qual a razão de variação de z é máxima é dada por $\nabla f(x, y)$.

Exemplo 1.17.3 *Trace um mapa de contorno mostrando as curvas de nível da função f do Exemplo 1.17.2 em $z = 1, 2, 3$. Mostre também a representação de $\nabla f(4, 3)$ tendo o seu ponto inicial em $(4, 3)$.*

Solução: As curvas de nível são elipses e estão dispostas na Figura 1.17.3, juntamente com a representação de $\nabla f(4, 3)$.

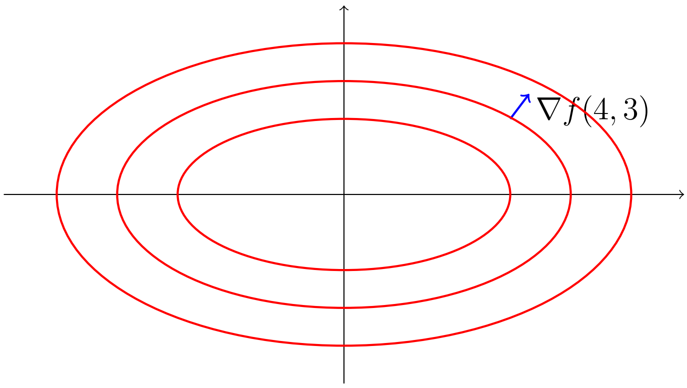

Figura 1.27: Mapa de Contorno da função f do Exemplo 1.17.3.

■

Exemplo 1.17.4 *Dada $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$, encontre a taxa de variação máxima da função f no ponto $(1, -2)$.*

Solução: Estamos procurando o valor máximo de $D_{\mathbf{U}} f(1, -2)$, que ocorre quando $\nabla f(1, -2)//\mathbf{U}$ pois, nesse caso, $\cos(\theta) = 1$, onde θ é o ângulo entre $\nabla f(1, -2)$ e $\mathbf{U}$. Assim, como $f_x(x, y) = 4x + 3$ e que $f_y(x, y) = -2y - 1$, segue que

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3, -2y - 1) \Rightarrow \nabla f(1, -2) = (7, 3)$$

e como $D_{\mathbf{U}} f$ é máximo se $D_{\mathbf{U}} f(x, y) = ||\nabla f(x, y)||$, segue que no ponto $(1, -2)$ o valor máximo procurado fica dada por

$$||\nabla f(1, -2)|| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{58}.$$

■

Exemplo 1.17.5 *A temperatura em qualquer ponto (x, y) de uma lâmina retangular situada no plano XY é determinada por $T(x, y) = x^2 + y^2$.*

a) Encontre a razão de variação de temperatura no ponto $(3, 4)$ na direção que faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o semi-eixo positivo x;

b) Encontre a direção para o qual a razão de variação da temperatura no ponto $(-3,1)$ é máxima.

Solução:

a) Temos que encontrar $D_{\mathbf{U}}T(3,4)$. Sabendo que $\mathbf{U} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ e que $T_x(x,y) = 2x$ e que $T_y(x,y) = 2y$, então, segue que

$$D_{\mathbf{U}}T(x,y) = \nabla T \cdot \mathbf{U} = x + \sqrt{3}y.$$

Assim, $D_{\mathbf{U}}T(3,4) = 3 + 4\sqrt{3} \approx 3 + 4.1,732 = 9.93$. Logo, em $(3,4)$ a temperatura é crescente na razão de $9,93$ unidades por unidade de variação de distância medida na direção de $\mathbf{U}$.

b) Temos que $D_{\mathbf{U}}T(-3,1)$ é máximo quando $\nabla T(-3,1)//\mathbf{U}$. Sabendo que $\nabla T(-3,1) = (-6,2)$, então, temos que a medida do ângulo θ, em radianos, que dada pela direção $\nabla T(-3,1)$ é

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, $\theta = \pi - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Logo, a razão de variação da temperatura no ponto $(-3,1)$ é máxima na direção de $\mathbf{U}$, forma um ângulo de $\theta = \pi - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ radianos com o semieixo positivo x.

■

Exemplo 1.17.6 *Se V volts é o potencial elétrico em qualquer ponto (x,y,z) no espaço tridimensional e $V = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, encontre:*

a) a razão de variação de V no ponto $P = (2,2,-1)$ na direção do vetor $v = (2-3,6)$;

b) a direção da razão de variação máxima de V em $(2,2,-1)$.

Solução:

a) Como $v = (2-3,6)$, temos que $||v|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$. Assim, um vetor unitário $\mathbf{U}$, na direção de v, é dado por

$$\mathbf{U} = \frac{v}{||v||} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Além disso, como $V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ segue que

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) =$$

$$= \left(\frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{-y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{-z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \right).$$

Assim,

$$D_{\mathbf{U}} f(2,2,-1) = \nabla f(2,2,-1) \cdot \mathbf{U} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) \cdot \left(-\frac{2}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{27} \right) = \frac{8}{189}.$$

Portanto, em $P = (2,2,-1)$ o potencial elétrico cresce na razão de $\frac{8}{189}$ volts por unidade de variação na distância medida na direção de $\mathbf{U}$.

b) Temos que $\nabla f(2,2,-1) = \left(-\frac{2}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{27} \right)$. Assim, um vetor unitário na direção de $\nabla f(2,2,-1)$ fica dado por

$$\frac{\nabla f(2,2,-1)}{\| \nabla f(2,2,-1) \|} = \frac{\left(-\frac{2}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{27} \right)}{\frac{3}{27}} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Dessa forma, os cossenos diretores do vetor que dão a direção de máxima variação de V em $(2,2,-1)$ são $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$, $\cos(\beta) = -\frac{2}{3}$ e $\cos(\gamma) = \frac{1}{3}$.

$\blacksquare$

Agora, faça alguns exercícios para fixar o conteúdo.

1.18 Exercícios

Exercício 1.18.1 *Calcule o vetor gradiente para cada uma das funções a seguir.*

a) $f(x,y) = x^2 y$;

b) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = e^y \ln(2x)$;

d) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$;

e) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

g) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$;

h) $f(x,y,z) = \frac{x-z}{x+y}$;

i) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{z^2}$.

Exercício 1.18.2 *Represente geometricamente o vetor gradiente da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ em cada um dos pontos a seguir:*

a) $(1,1)$; *b)* $(-1,-1)$; *c)* $(1,0)$; *d)* $(0,1)$.

Exercício 1.18.3 *Nos itens a seguir, encontre o gradiente da função f no ponto dado e a razão de variação do valor da função na direção do vetor unitário $\boldsymbol{U}$ em P.*

a) $f(x,y) = x^2 - 4y$, $P = (-2,2)$ e $\boldsymbol{U} = \cos(\frac{\pi}{3})\vec{i} + \mathrm{sen}(\frac{\pi}{3})\vec{j}$;

b) $f(x,y) = e^{2xy}$, $P = (2,1)$ e $\boldsymbol{U} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$;

c) $f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4xz$, $P = (-2,1,3)$ e $\boldsymbol{U} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$;

d) $f(x,y,z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2; P = (1,1,1); \boldsymbol{U} = \frac{3\sqrt{5}}{7})\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k}$;

Exercício 1.18.4 *Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função* $f(x,y) = x^2 - 4x$ *nos pontos* $8, 4, 0, -4$ *e* -8. *Mostre também a representação de* $\nabla f(-2,2)$ *a partir de* $(-2,2)$.

Exercício 1.18.5 *A equação da superfície de uma montanha é*

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2,$$

onde a distância é medida em metros, o eixo x *aponta para o leste e o eixo* y *aponta para o norte. Uma alpinista está no ponto correspondente a* $(-10, 5, 80)$.

a) *Qual a direção que a subida é mais íngreme?*

b) *Se a alpinista se move para a direção leste, ela está subindo ou descendo? e qual a taxa de variação nessa direção?*

c) *Se a alpinista se move para a direção sudoeste, ela está subindo ou descendo? e qual a taxa de variação nessa direção?*

d) *Em qual direção ela estará sobre uma curva de nível?*