8.2 Regras Operacionais

Vamos agora estudar algumas das principais regras envolvendo derivação de funções.

Teorema 8.2.1 *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. Então, as funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ (se $g'(a) \neq 0$) também são deriváveis no ponto a e, além disso,*

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.

Demonstração: Essas regas já foram exploradas em diversos cursos, por isso ficará de exercício. ■

Agora vamos apresentar uma das mais importantes regras de derivação, que é a *Regra da Cadeia*, que está relacionado com o encadeamento de funções.

Teorema 8.2.2 *(**Regra da Cadeia**:) Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, tais que $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável em a e g é derivável em b, então, $g \circ f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em a e, além disso, temos que*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstração: Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, tais que $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Do Teorema 8.1.1, como f é derivável em a, segue que se $a + h \in X$, então, $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h)$, com $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

Por outro lado, como g é derivável em b, supondo que $k = f(a+h) - f(a)$ e sendo f contínua, segue que $h \to 0$ implica em $k = k(h) \to 0$. Consequentemente, temos que

$$g(b+k) - g(b) = g'(b)k + s(k), \text{ com } \lim_{k \to 0} \frac{s(k)}{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot (f(a+h) - f(a)) + s(k), \text{ com } \lim_{k \to 0} \frac{s(k)}{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k),$$

$$\text{com } \lim_{k \to 0} \frac{s(k)}{k} = 0 \Rightarrow g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + \phi(h),$$

onde $\phi(h) = g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k)$. Dessa forma, segue do Teorema 8.1.1 que $g \circ f$ é derivável em a se $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(h)}{h} = 0$. Paras isso, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k)}{h} = g'(f(a)) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{s(k)}{h}.$$

Como

$$\frac{s(k)}{h} = \frac{s(k)}{k} \frac{k}{h} = \frac{s(k)}{k} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

segue que

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{s(k)}{k}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\cdot\lim_{k\to 0}\frac{s(k)}{k}$$

e, consequentemente, $\lim_{h\to 0}\dfrac{\phi(h)}{h}=0$. Portanto, $g\circ f: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é derivável em a e, além disso, temos que

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a).$$

■

Corolário 8.2.1 *Seja $f: X\to Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y\subset\mathbb{R}$, com inversa $g=f^{-1}: Y\to X$. Se f é derivável num ponto $a\in X\cap X'$ e g é contínua num ponto $b=f(a)$, então, g é derivável em b se, e somente se, $f'(a)\neq 0$. Em caso afirmativo, temos que $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.*

Demonstração: Seja $(x_n)\subset X\setminus\{a\}$, para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\to a$. Então, como f é uma bijeção (e, consequentemente, injetiva), temos que $y_n=f(x_n)\in Y\setminus\{b\}$, para todo n, com $y_n\to b$. Daí, temos que $b\in Y\cap Y'$. Como g é a inversa da função f, segue que

$$(g\circ f)(x)=x,\ \forall\ x\in X.$$

Dessa forma, sundo que g é diferenciável e aplicando a regra da cadeia na igualdade, temos que

$$\frac{d}{dx}\big(g\circ f\big)(x)=\frac{d}{dx}(x)\Rightarrow g'(b)\cdot f'(a)=1,$$

ou seja, se $f'(a)\neq 0$, então, temos que $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

Reciprocamente, suponha que $f'(a)\neq 0$. Assim, para qualquer sequência $y_n=f(x_n)\in Y\setminus\{b\}$, para todo n, com $y_n\to b$ temos, da continuidade de g no ponto b que $x_n\to a$. Dessa forma, temos que

$$g'(b)=\lim\frac{g(y_n)-g(b)}{y_n-b}=\left(\lim\frac{y_n-b}{g(y_n)-g(b)}\right)^{-1}=\left(\lim\frac{f(x_n)-f(a)}{g(f(x_n))-g(f(a))}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\lim\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right)^{-1}=\big(f'(a)\big)^{-1}=\frac{1}{f'(a)}.$$

Portanto, g é derivável em b. ■

Exemplo 8.2.1 *a) Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável, considere as funções $g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $g(x)=f(x^2)$ e $h(x)=(f(x))^2$. Dessa forma, para todo $x\in\mathbb{R}$ temos que*

$$g'(x)=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)\text{ e } h'(x)=2f(x)^1\cdot f'(x)=2f(x)f'(x).$$

b) Para cada $n\in\mathbb{N}$ fixo, a função $g:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, dada por $g(x)=\sqrt[n]{x}$ é derivável no intervalo $]0,+\infty[$. Além disso, temos que a sua inversa $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ é dada por $f(x)=x^n$. Assim, como

$$g(x)=\sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow f(y)=x\text{ e } g'(x)\cdot f'(y)=1,$$

segue que

$$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \forall\ x>0.$$

■