2.3 $\mathbb{R}$ é um Corpo Ordenado Completo

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, como vimos nas seções anteriores. O conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{Q}^C$ não é um corpo, porém, ele é um conjunto ordenado. Contudo, esses dois conjuntos não possui uma característica extremamente importante, relacionada a um conjunto ser *Completo*, propriedade essa relacionada com o *Limite de suas Sequências*. Essa característica será explorada nessa seção.

Definição 2.3.1 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito ser Limitado Superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que b é uma Cota Superior de X.*

Definição 2.3.2 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito ser Limitado Inferiormente quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que a é uma Cota Inferior de X.*

Definição 2.3.3 *Um conjunto X é dito ser Limitado quando ele é limitado superiormente e inferiormente ao mesmo tempo.*

Observação 2.3.1 *a) Se $X \in \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então, X é limitado inferiormente e superiormente. Dessa forma, X possui uma cota inferior, digamos $a \in \mathbb{R}$, e X possui uma cota superior, digamos $b \in \mathbb{R}$, que satisfaz $a \leq x \leq b$, para todo $x \in X$. Dessa forma, temos que $X \subset [a, b]$ e, consequentemente, todo conjunto limitado pode ser encaixado num intervalo fechado $[a, b]$.*

b) Como um conjunto $X \in \mathbb{R}$ limitado pode ser encaixado num intervalo fechado $[a, b]$, temos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$.
De fato: *Como $X \subset [a, b]$, tome $k = \max\{|a|, |b|\}$ e, consequentemente, $X \subset [a, b] \subset [-k, k]$.* □

c) Se um conjunto X é limitado inferiormente, então, ele possui uma cota inferior, digamos a. Assim, como $a - 1 < a$, segue que $a - 1$ é uma cota inferior e, por isso, se um conjunto é limitado inferiormente, então, ele possui infinitas cotas inferiores.

d) Se um conjunto X é limitado superiormente, então, ele possui uma cota superior, digamos b. Assim, como $b < b + 1$, segue que $b + 1$ é uma cota superior e, por isso, se um conjunto é limitado superiormente, então, ele possui infinitas cotas superiores.

Definição 2.3.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado superiormente. Um número real b é dito ser um Supremo do conjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X. Notação: $b = \sup(X)$.*

Observação 2.3.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado superiormente. Se b é um supremo de X, então:*

a) $x \leq b$, para todo $x \in X$;

b) Se $x \leq c$, para todo $x \in X$, então, $b \leq c$;

c) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \epsilon < x$;

d) Se $b = \sup(X)$, então, nenhum número real menor do que b pode ser uma cota superior de X.

Exemplo 2.3.1 $\sup(\mathbb{R}_-) = 0$, *visto que $x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}_-$ e qualquer outra cota superior de X é um número positivo. Além disso, não existe* $\sup(\mathbb{R}_+)$, *visto que $\mathbb{R}_+$ não é limitado superiormente.*

■

Definição 2.3.5 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Assim, $b \in \mathbb{X}$ é dito ser o Elemento Máximo (ou o Maior Elemento) de X, se $b = \sup(X)$.*

Exemplo 2.3.2 *a) Se $X = [a, b]$, então, temos que b é o elemento máximo de X.*

b) Se $X =]a, b[$, então, temos que $b = \sup(X)$, porém ele não é o elemento máximo de X, visto que $b \notin X$.

c) Se $X =]-\infty, b]$, então, temos que b é o elemento máximo de X.

■

Definição 2.3.6 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado inferiormente. Um número real a é dito ser um Ínfimo do conjunto X quando a é a maior das cotas inferiores de X. Notação: $a = \inf(X)$.*

Observação 2.3.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado inferiormente. Se a é um ínfimo de X, então:*

a) $a \leq x$, para todo $x \in X$;

b) Se $d \leq x$, para todo $x \in X$, então, $d \leq a$;

c) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \epsilon$;

d) Se $a = \inf(X)$, então, nenhum número real maior do que a pode ser uma cota inferior de X.

Exemplo 2.3.3 *Temos que*

a) $\inf(\mathbb{R}_+) = 0$; *b)* $\inf([2, 7[) = 2$; *c)* $\inf(]2, 7]) = 2$;

■

Definição 2.3.7 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Assim, $a \in \mathbb{X}$ é dito ser o Elemento Mínimo (ou o Menor Elemento) de X, se $a = \inf(X)$.*

Exemplo 2.3.4 *a) Se $X = [a, b]$, então, temos que a é o elemento mínimo de X.*

b) Se $X =]a, b[$, então, temos que $a = \inf(X)$, porém ele não é o elemento mínimo de X, visto que $a \notin X$.

c) Se $X = [a, +\infty[$, então, temos que a é o elemento mínimo de X.

■

Observação 2.3.4 *Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo corresponde a dizer uma das afirmações a seguir: $\forall\ X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, temos que:*

a) Se X é limitado superiormente, segue que X possui supremo.

b) Se X é limitado inferiormente, segue que X possui ínfimo.

c) Se X é limitado, segue que X possui supremo e ínfimo.

Exemplo 2.3.5 *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não é um corpo completo.*
De fato: *Observe que $X = \mathbb{Q} \cap [0, \pi] \subset \mathbb{Q}$ não possui supremo, visto que* $\sup(X) = \pi \notin \mathbb{Q}$. □

■

Teorema 2.3.1 *a) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.*

b) Se $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$, então, $\inf(X) = 0$.

c) Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Demonstração:

a) Suponha que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ seja limitado superiormente. Então, existe $b \in \mathbb{R}$ que é o supremo de $\mathbb{N}$ e, consequentemente, $n < b$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

   Dessa forma, como b é a menor das cotas superiores de $\mathbb{N}$, então, temos que $b - 1$ não é uma cota superior do conjunto e, por isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b - 1 < n$, ou seja, $b < n + 1$, o que é um absurdo, visto que $n + 1 \in \mathbb{N}$ e $b = \sup(\mathbb{N})$. Portanto, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$ e, consequentemente, zero é uma cota inferior de X. Agora, suponha que $c > 0$ seja um conta inferior de X.

   Do item a) temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{c} < n$ e, dessa forma, $\frac{1}{n} < c$. Por isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < c$, o que é uma contradição com o fato de c ser uma cota inferior de X. Portanto, $\inf(X) = 0$, visto que nenhum número positivo pode ser cota inferior de X.

c) Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$ e, por isso, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

■

Agora vamos apresentar um resultado muito importante. Ele nos garante a existência de pelo menos um número em todos os intervalos de uma cadeia de intervalos encaixados.

Teorema 2.3.2 ***(Teorema dos Intervalos Encaixados)****: Dados uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Da inclusão $I_{n-1} \supset I_n \Rightarrow [a_{n-1}, b_n - 1] \subset [a_n, b_n]$, temos que $a_{n-1} \leq a_n$ e $b_n \leq b_{n-1}$ e, consequentemente,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Dessa forma, segue que o conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Daí, seja $c = \sup(A)$, logo $a_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada b_n é uma cota superior de A, segue que $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $a_n \leq c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.3.3 *O conjunto dos números reais é não-enumerável.*

Demonstração: Suponha que $\mathbb{R}$ seja enumerável. Então, existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Como f é uma bijeção, seque que f é sobrejetiva e, dessa forma, construa uma sequência decrescente de intervalos fechados da seguinte forma: Sejam $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

- Considere um intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$, e tome $f(1) \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 < f(1)$.
- Suponha (hipótese de indução) que exista uma cadeia $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ de intervalos fechados encaixados de forma que se tome $f(j) \notin I_j$, com $a_j < f(j)$, para todo j.
- Assim, para $f(n+1)$, se $f(n+1) \notin I_n = [a_n, b_n]$, tome $I_{n+1} = I_n$. Caso contrário, como $a_n < f(n+1)$, tome $b_n = \dfrac{a_n + f(n+1)}{2}$.

Logo, do *P.I.F.* temos que existe uma cadeia $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, de intervalos fechados encaixados, com $a_n < f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e sendo f sobrejetiva, temos que todo número real x é dado por algum $f(n)$. Por outro lado, do Teorema 2.3.2, como $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, segue que existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, f não é sobrejetiva, o que é uma contradição. Portanto, $\mathbb{R}$ é um conjunto não enumerável. ■

Definição 2.3.8 *Um número real que não é racional é chamado de Irracional.*

Como já mostrado, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável. Então, segue do último resultado, que o seu complementar $\mathbb{Q}^C$ não pode ser enumerável, visto que a união de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Corolário 2.3.1 *Todo intervalo não-degenerado é não-enumerável.*

Demonstração: Considere a função

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (-1,1) \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}.$$

Temos que f é uma bijeção (prove) entre $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$. Consequentemente, $(-1,1)$ é um conjunto não-enumerável. Agora, considere a função

$$g : \begin{array}{ccc} (-1,1) & \to & (a,b) \\ x & \mapsto & \dfrac{(b-a)x+(b+a)}{2} \end{array}.$$

Como g é uma função afim, temos que g é uma bijeção entre $(-1,1)$ e (a,b) e, consequentemente, $h = g \circ f : \mathbb{R} \to (a,b)$ é uma bijeção (composição de duas bijeções) e, por isso, (a,b) é um conjunto não-enumerável. ■

Teorema 2.3.4 *Todo intervalo não-degenerado contém números racionais e números irracionais.*

Demonstração: Seja $I = (a,b)$ um intervalo não-degenerado. Se I não possui números irracionais, segue que $I \subset \mathbb{Q}$ e, por isso, I é enumerável, o que é uma contradição. Portanto, I possui números irracionais. Agora falta mostrar que I possui números racionais. Para isso, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < b-a$.

Tome $I_m = \left[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m+1}{n}\right]$, para $m \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, temos uma partição para $\mathbb{R}$, ou seja, podemos reescrever o conjunto dos números reais como a seguir

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n.$$

Como $a < a + \dfrac{1}{n} < b$, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_m$ e, consequentemente,

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}.$$

Como $b > \dfrac{1}{n} + a$ e $a > \dfrac{m}{a}$, segue que $b > \dfrac{1}{n} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{m+1}{n}$ e, por isso, $\dfrac{m+1}{n} \in (a,b)$, o que completa a demonstração. ■

Agora, faça os exercícios. Bons estudos....