3.5 Inversão de Matrizes pelo Método de Gauss (Escalonamento)

O escalonamento de sistemas lineares também é conhecido por *Método de Gauss*. Assim, vimos que ao usarmos o método de Gauss, obtemos de forma clara a informação se um sistema linear $s : Ax = b$ de ordem n, possui solução única, para isso, basta que tenhamos $\rho(A) = n$. Em outras palavras, quando $\det(A) \neq 0$.

Consequentemente, se o determinante da matriz principal A dos sistema linear a for diferente de zero, ela é uma matriz invertível. Com essa informação, vamos estabelecer uma forma de obter a inversa de uma matriz, usando escalonamento. Se

Observe que se $s : Ax = b$ possui solução única, então, ela é dada por $x = A^{-1}b$. Dessa forma, se para cada índice i ($i \in \{1, 2, \cdots, n\}$) tivermos o vetor $b = e_i$ valendo um na posição i e zero nas demais posições, temos que $B_i = A^{-1}e_i$, ou seja, cada solução $x = A^{-1}e_i$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, é uma das colunas na matriz inversa de A. Consequentemente, construindo uma noma matriz $[A\vdots Id]$, chamada de **Matriz Aumentada**, ao escalonarmos essa nova matriz, obtemos a inversa de uma matriz A, se ela existir, como descrito a seguir

Teorema 3.5.1 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz. Então, temos que A é invertível se, e somente se, a matriz aumentada $[A\vdots Id]$ puder ser transformada numa matriz aumentada $[Id\vdots B]$ usando apenas operações elementares sobre linhas de matriz. Nesse caso, temos que $B = A^{-1}$.*

Demonstração: Não sera feita nessas notas. ■

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1 *Encontre, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.*

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A\vdots Id]$, temos que

$$[A\vdots Id] = \left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3/2 \end{array}\right] \overset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3/2 \end{array}\right].$$

Portanto, a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}$. ■

Exemplo 3.5.2 *Encontre, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.*

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A\vdots Id]$, temos que

$$[A\vdots Id]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3\to L_3-5L_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_3\to L_3+4L_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2\to L_2-4L_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_1\to L_1-3L_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1\to L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto, a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1}=\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

■

Exemplo 3.5.3 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A\vdots Id]$, temos que

$$[A\vdots Id]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2\to L_2-4L_1 \\ L_3\to L_2-7L_1}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_3\to L_3-2L_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

e consequentemente observem que na matriz aumentada $[A\vdots Id]$ não podemos transformar a matriz A na identidade. Portanto, a matriz A é uma matriz singular, ou seja, ela não possui inversa. ■

Exemplo 3.5.4 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A=\begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & 7 & 6 \\ -26 & -24 & -22 \end{bmatrix}$.

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A\vdots Id]$, temos que

$$[A\vdots Id]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -26 & -24 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2\to L_2+7L_1 \\ L_3\to L_3+26L_1}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 62 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 210 & 186 & 26 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - 3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 62 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right],$$

e consequentemente observem que na matriz aumentada $[A \vdots Id]$ não podemos transformar a matriz A na identidade. Portanto, a matriz A é uma matriz singular, ou seja, ela não possui inversa. ■

Exemplo 3.5.5 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A \vdots Id]$, temos que

$$[A \vdots Id] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_2 \to L_2 - L_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{L_3 \to L_3 - 3L_2 \\ L_4 \to L_4 - 4L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -4 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 22 & -7 & -4 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_3 \to -L_4 \\ L_4 \to \frac{1}{13} L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -22 & 7 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/13 & -3/13 & 1/13 & 3/13 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_1 \to L_1 + L_4 \\ L_2 \to L_2 + 4L_4 \\ L_3 \to L_3 + 22L_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 9/13 & -3/13 & 1/13 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/13 & 1/13 & 4/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/13 & -14/13 & 22/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/13 & -3/13 & 1/13 & 3/13 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 6/13 & 11/13 & -21/13 & 2/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/13 & 1/13 & 4/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/13 & -14/13 & 22/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/13 & -3/13 & 1/13 & 3/13 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_1 \to L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/13 & 12/13 & -17/13 & 1/13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/13 & 1/13 & 4/13 & -1/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/13 & -14/13 & 22/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/13 & -3/13 & 1/13 & 3/13 \end{array}\right].$$

Portanto, a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & 12 & -17 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -14 & 22 & 1 \\ -4 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

■

Exemplo 3.5.6 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Escalonando a matriz aumentada $[A \vdots Id]$, temos que

$$[A \vdots Id] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{L_1 \to L_3 \\ L_3 \to L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{L_2 \to \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \to L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1/2 & 0 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_3 \to \frac{1}{2} L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1/2 & 0 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_4 \to L_4 + 4L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_4 \to \frac{1}{2} L_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/4 & -1 & -3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right].$$

Portanto, a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.

3.6 Exercícios

Exercício 3.6.1

Encontre, se existir, a inversa de cada uma das matrizes a seguir usando o método de Gauss.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

k) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$;

l) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

m) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

n) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

o) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

p) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.