Capítulo 2

Funções Vetoriais de Várias Variáveis

Nesse capítulo faremos um estudo parecido ao do Capítulo 1, porém para Funções Vetoriais de Várias Variáveis. Começaremos com a Definição, Exemplos e algumas propriedades de funções vetoriais de várias variáveis na Seção 2.1, na Seção 2.3 estudaremos Limite e Continuidade de funções vetoriais de várias variáveis. Já na Seção 2.5 estudaremos Derivadas Parciais de funções vetoriais de várias variáveis e na Seção 2.7 estudaremos um pouco de Superfícies e Parametrização de Superfícies. Vamos começar definindo funções vetoriais de várias variáveis

2.1 Definição e Exemplos

Desde as séries iniciais precisamos responder a pergunta: "O que é uma função?" Nos cursos de Cálculo foram feitos alguns estudos sobre funções que, de uma maneira simples, pode ser visto como uma regra que associa a todos os elementos de um conjunto A a um único elemento de um conjunto B.

É importante ressaltar que o conjunto imagem das funções reais sempre era um subconjunto de $\mathbb{R}$. Nesse curso começamos a mudar isso. Já no Capítulo 1 estudamos funções onde o conjunto imagem era formado por vetores. Contudo, para o caso lá estudado, o conjunto domínio estava contido em $\mathbb{R}$.

Agora, vamos tomar aplicações cujo domínio e imagem sejam de várias dimensões. Dessa forma, o que faremos aqui será muito parecido com o que foi feito no Capítulo 1, mas trabalharemos com as aplicações que tenham como conjunto de partida um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e como chegada um conjunto $B \subset \mathbb{R}^m$, vamos a definição de *Funções Vetoriais de Várias Variáveis.*

Definição 2.1.1 *Sejam m e n dois números naturais positivos. Uma Função Vetorial de n variáveis reais a valores em $\mathbb{R}^m$ (ou uma Aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$) é uma função $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que associa a todo vetor $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$ a um único vetor*

$$\vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)) \subset B.$$

Observação 2.1.1 *Seja $\vec{f}$ uma aplicação de $A \subset \mathbb{R}^n$ em $B \subset \mathbb{R}^m$ dada por*

$$\vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

Então, temos que cada uma das funções coordenadas $f_i(x_1, \cdots, x_n)$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ são funções reais de várias variáveis.

Exemplo 2.1.1 *a) Considere $\vec{f}$ a função vetorial de três variáveis dada por*

$$\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z).$$

Então, temos que o $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}^3$, visto que não existe nenhuma restrição para x, y ou z. Além disso, temos também que $Im\vec{f}$ é o conjunto dos elementos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tais que $u \geq 0$.

b) Seja $\vec{f}$ a função vetorial de três variáveis dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = 2x\vec{i} + \frac{xz}{2 - y}\vec{j} - \sqrt{z}\vec{k}.$$

Então, as funções coordenadas de $\vec{f}$ são dadas por

$$f_1(x, y, z) = 2x, f_2(x, y, z) = \frac{xz}{2 - y} \ e \ f_3 = -\sqrt{z}.$$

Temos que $D_{f_1} = \mathbb{R}^3$, visto que não tem nenhuma restrição para as variáveis x, y ou z. Já $D_{f_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \neq 2\}$, visto que o denominador $2 - y$ de f_2 precisa ser não nulo. Por fim, temos que $D_{f_3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}$, pois $-\sqrt{z}$ só existe quando $z \geq 0$.

Dessa forma, o domínio da função $\vec{f}$, fica dado pela intersecção dos domínios de cada uma das funções coordenadas, ou seja,

$$D_{\vec{f}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ y \neq 2 \ e \ z \geq 0\}.$$

O conjunto imagem é dado por

$$Im_{\vec{f}} = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; w \leq 0\right\}.$$

c) Considere $\vec{f}$ a função vetorial de duas variáveis dada por

$$\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\vec{j}.$$

Então, as funções coordenadas de $\vec{f}$ são

$$f_1(x, y) = x \ e \ f_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Observe que f_1 não possui restrição para x e y e, por isso, $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$. Já f_2 só faz sentido quando $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ e, por isso, $D_{f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Portanto,

$$D_{\vec{f}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

O conjunto imagem dessa função é dado por

$$Im_{\vec{f}} = [-1, 1] \times [0, 1].$$

d) Seja $\vec{f}$ a aplicação vetorial de três variáveis dada por

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Então, temos que as funções coordenadas de $\vec{f}$ são

$$f_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z} \text{ e } f_2(x,y,z) = \frac{y}{1-z}.$$

A restrição que aparece nas duas funções coordenadas são as mesmas, ou seja, essas funções só fazem sentido para os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ tais que $1 - z \neq 0$. Logo,

$$D_{\vec{f}} = D_{f_1} = D_{f_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z \neq 1\}.$$

Além disso, temos que o conjunto imagem dessa aplicação é $\mathbb{R}^2$.

■

Observação 2.1.2 *Podemos usar a notação de matrizes para representar uma função vetorial Por exemplo, seja $\vec{f}$ a função vetorial dada por*

$$\vec{f}(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz).$$

Dessa forma, uma representação matricial para $\vec{f}$ fica dada por

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ xy+yz+zx \\ xyz \end{bmatrix}.$$

Agora vamos definir o *Gráfico* de funções vetoriais de várias variáveis. Lembre-se o gráfico não é um desenho e sim um conjunto, como apresentado a seguir.

Definição 2.1.2 *Seja $\vec{f}$ uma aplicação de $A \subset \mathbb{R}^n$ em $B \subset \mathbb{R}^m$ dada por*

$$\vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

Então, o Gráfico de $\vec{f}$, denotado por $Gr(\vec{f})$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$ dado por

$$Gr(\vec{f}) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^{n+m}; u \in D_{\vec{f}} \text{ e } \vec{f}(u) = v\}.$$

Exemplo 2.1.2 *Seja $\vec{f}$ a função vetorial de duas variáveis dada por*

$$\vec{f}(x,y) = (x^3, y, x^2 + y^2).$$

Então, o gráfico de $\vec{f}$ fica dado por

$$Gr(\vec{f}) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^5; u \in \mathbb{R}^2 \text{ e } v = (x^3, y, x^2+y^2)\}.$$

■

Exemplo 2.1.3 *Seja $\vec{f}$ a função vetorial de duas variáveis dada por*

$$f\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ucos(v) \\ usen(v) \\ v \end{bmatrix}, \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array} \right. .$$

Então, o gráfico de $\vec{f}$ fica dado por

$$Gr(\vec{f}) = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^5; \alpha \in [0,4] \times [0, 2\pi] \ e \ \gamma = (ucos(v), usen(v), v)\}.$$

■

Agora vamos aos exercícios.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1 *Escreva uma função vetorial que associa a cada ponto de plano XY ao triplo do seu vetor posição.*

Exercício 2.2.2 *Escreva uma função vetorial que associa a cada ponto do espaço um vetor unitário com a mesma direção do vetor posição e sentido contrário.*

Exercício 2.2.3 *Escreva o conjunto domínio $D_{\vec{f}}$ e $Im_{\vec{f}}$ de cada função vetorial dada a seguir. Escreva também cada uma das suas funções coordenadas da função vetorial $\vec{f}$ e o conjunto $Gr(\vec{f})$.*

a) $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\vec{k}$;

b) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{1}{x}\vec{i} + xy\vec{j}$;

c) $\vec{f}(x,y) = (x^2 + y^2, x\sqrt{y}, xy)$;

d) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$;

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right)$;

f) $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{z}\vec{k}$;

g) $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{j} + \sqrt{x+z}\vec{k}$;

h) $\vec{f}(x,y,z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\vec{i} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\vec{j} + z\vec{k}$;

i) $f\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(u)sen(v) \\ sen(u)sen(v) \\ cos(v) \end{bmatrix}$;

j) $f\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(u)cosh(v) \\ sen(u)cosh(v) \\ senh(v) \end{bmatrix}$.