Capítulo 4

Números Reais

4.1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Seja AB um seguimento de reta. Para medi-lo é necessário fixar um segmento padrão u, chamado de *Unitário*. Por definição a medida do seguimento unitário é 1 (ou seja, $\bar{u} = \overline{AB} = 1$).

Diz-se que dois ou mais segmentos são *Congruentes* se eles possuem a mesma medida (ou seja $AB \equiv CD \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$). Além disso, se $n - 1$ pontos interiores de um segmento AB o decompuserem em n segmentos justapostos, então, a medida de AB ($\overline{AB}$) será igual a soma das medidas desses n segmentos. Se esses segmentos parciais forem todos congruentes a u, diz-se que u cabe n vezes em AB ou que a medida de AB é igual a n ($\overline{AB} = n$).

Caso o segmento u não caiba n vezes em AB, mas pode existir um segmento ω que caiba m vezes no segmento u e que caiba t vezes no segmento AB. Então, ω é uma medida comum entre u e AB.

Definição 4.1.1 *Suponha que exista um segmento ω tal que $\bar{u} = m.\bar{\omega}$ e que $\overline{AB} = t.\bar{\omega}$. Nessas condições, diz-se que u e AB são dois segmentos Comensuráveis. A medida de ω será a fração $\dfrac{1}{m}$ e a medida de AB será igual a t vezes a medida de ω, ou seja,*

$$\bar{\omega} = \frac{1}{m} \text{ e } \overline{AB} = \frac{t}{m}.$$

Definição 4.1.2 *Dois segmentos que não são comensuráveis, ou seja, não existe um segmento ω tal que $\bar{u} = m.\bar{\omega}$ e que $\overline{AB} = t.\bar{\omega}$, são chamados de Incomensuráveis.*

Como existem segmentos incomensuráveis (por exemplo, o lado de um quadrado e a sua diagonal), segue que $\mathbb{N}$ e as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta, sendo necessário descrever os números Irracionais.

Definição 4.1.3 *Seja u um segmento unitário. Os números irracionais representam a medida dos segmentos que não são comensuráveis com u.*

4.2 A Reta Real

Fixe numa reta um ponto O, chamando-o de *Origem*, e um ponto A diferente de O. Tome a medida de OA como sendo a unidade de comprimento. A reta OA é chamada de a *Reta Real* ou o *Eixo Real*.

A semirreta de origem em O e que contém A ($\overrightarrow{OA}$) é chamada de semirreta *Positiva*. A outra semirreta com origem em O é chamada de semirreta *Negativa*. Considera-se que os pontos da semirreta positiva estão à direita de O e que os pontos da semirreta negativa estão à esquerda de O.

Seja x um ponto da reta OA. Se o segmento de reta OA (unidade) couber n vezes em OX, diz-se que a abcissa de X é o número n (se X está na semirreta positiva) ou o número $-n$ (se X está na semirreta negativa). Se $X = O$, diz-se que a abcissa é zero.

Definição 4.2.1 $\mathbb{Z}$ *é o conjunto formado pelo zero e pelas abscissas dos pontos X do eixo real, chamado de Conjunto dos Números Inteiros.*

Assim,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\} = \{-n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 4.2.2 $\mathbb{Q}$ *é o conjunto formado por todas as abcissas dos pontos X do eixo real que são comensuráveis com OA, chamado de Conjunto dos Números Racionais.*

Assim,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m}; n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definição 4.2.3 *Um ponto X no eixo real tal que OX e OA são segmentos incomensuráveis é atribuído a um número x chamado de Número Irracional. Esse número x é positivo se X está à direita de O, e x é negativo se X está à esquerda de O.*

Definição 4.2.4 $\mathbb{R}$*, o Conjunto dos Números Reais, é o conjunto formado por todos os números racionais e irracionais.*

Pode-se perceber que existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e a reta OA, visto que cada ponto X da reta OA pode ser associado com a medida do segmento OX, precedido do sinal positivo ou negativo, dependendo da posição de X. Além disso, é importante ressaltar que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Observação 4.2.1 *Sobre as letras de cada conjunto numérico destaca-se:*

- $\mathbb{N}$ *vem da inicial da palavra natural.*
- $\mathbb{Z}$ *vem da inicial da palavra zahl (número em alemão).*
- $\mathbb{Q}$ *vem da inicial da palavra quociente.*

- $\mathbb{R}$ *vem da inicial da palavra real.*

O conjunto dos números reais pode ser visto como um modelo aritméticos de uma reta, enquanto que uma reta pode ser visto como sendo o modelo geométrico de $\mathbb{R}$, o que fornece uma ideia intuitiva de $x + y$ e xy.

Definição 4.2.5 *Se X e Y são os pontos dos quais x e y respectivamente são as abcissas, diz-se que x é menor do que y, e escreve-se $x < y$, quando X está à direita de Y. A soma $x+y$ é a abcissa do ponto Y' tal que o segmento XY' tem o mesmo comprimento e sentido do segmento OY.*

Definição 4.2.6 *Um Corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas de Adição (+) e Multiplicação (.), que satisfazem as seguintes condições:*

- *$A.1$: a soma é associativa, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$;*
- *$A.2$: a soma é comutativa, ou seja, $a + b = b + a$;*
- *$A.3$: existência do elemento neutro na soma, ou seja, $\exists 0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in K$;*
- *$A.4$: existência do elemento simétrico na soma, ou seja, $\exists -x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$, para todo $x \in K$;*
- *$M.1$: o produto é associativo, ou seja, $(a.b).c = a.(b.c)$;*
- *$M.2$: o produto é comutativo, ou seja, $a.b = b.a$;*
- *$M.1$: existência do elemento neutro no produto, ou seja, $\exists 1 \neq 0 \in K$ tal que $x.1 = x$, para todo $x \in K$;*
- *$M.1$: existência do elemento simétrico no produto, ou seja, $\exists x^{-1} \in K$ tal que $x.x^{-1} = 1$, para todo $x \in K$, com $x \neq 0$;*
- *$D.1$: vale a distributividade da multiplicação em relação a adição, ou seja, $(a + b).c = a.c + b.c$.*

Definição 4.2.7 *Um Corpo Ordenado é um corpo K no qual existe um subconjunto $P \subset K$, chamado de elementos positivos de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- *$P1$: Se $x, y \in P$, então, $x + y \in P$ e $x.y \in P$;*
- *Para todo $x \in K$, uma, e apenas uma, das alternativas seguintes ocorre: $x = 0$, $x \in P$ ou $-x \in P$.*

Definição 4.2.8 *Seja K um corpo completo. Um elemento $b \in K$ é dito ser um supremo do subconjunto X quando:*

- *$S1$: para todo $x \in X$, tem-se que $x \leq b$;*
- *$S2$: se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.*

Nesse caso, diz-se que b é a menor das cotas superiores de X.

Definição 4.2.9 *Um corpo ordenado K é dito ser completo quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente $X \subset K$ possui um supremo em K.*

Teorema 4.2.1 *O conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.*

Demonstração: Ver livro Curso de Análise - Volume 1. $\square$

4.3 Expressões Decimais

Definição 4.3.1 *Uma expressão decimal é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots ,$$

onde $0 \leq a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, são chamado de dígitos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ um dígito a_n é chamado de n-ésimo dígito da expressão decimal α. O número a_0 é chamado de a Parte Inteira de α.

Exemplo 4.3.1 *São representações decimais:*

1. $\alpha = 13,428000\cdots$;
2. $\beta = 25,121212\cdots$;
3. $\pi = 3,14159265\cdots$.

No exemplo anterior, em α e β está claro como se obtêm os dígitos estão explicitados e, nesse caso, números dessa forma são chamados de Dízimas Periódicas. Já para a expressão π, que representa o comprimento da circunferência quando o diâmetro mede 1, não há uma regra clara para os próximos dígitos e, nesse caso, são chamados de Dízimas Não Periódicas, como definido a seguir.

Definição 4.3.2 *Uma expressão $\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ chama-se Dízima Periódica Simples, se período $a_1 a_2$ cdotsa$_k$ quando os primeiros k dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Uma dízima periódica que não é simples é chamada de Dízima Periódica Composta. Uma dízima que não é periódica é chamada de Dízima Não Periódica.*

Exemplo 4.3.2

1. $0,777\cdots$ *é uma dízima periódica simples.*
2. $0,3737\cdots$ *é uma dízima periódica simples.*
3. $4,111\cdots$ *é uma dízima periódica simples.*
4. $0,72727\cdots$ *é uma dízima periódica composta.*

5. $2,7111\cdots$ *é uma dízima periódica composta.*

6. $0,717273\cdots$ *é uma dízima não periódica.*

Tem-se que uma representação α pode ser reescrita como

$$\bar{\alpha} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots ,$$

e, por isso, uma sequência de dígitos precedido de um número inteiro representa um número real. A representação $\bar{\alpha}$ pode ser interpretada como a seguir: o número rela α tem um valor aproximado de

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, (n \in 0, 1, 2, \cdots).$$

Assim, substituindo α por α_n, seque que o erro cometido não é superior a 10^{-n}. Logo, conclui-se que:

$$\alpha_0 = a_0 \leq \alpha,$$
$$\alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha,$$
$$\alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha.$$

Logo, $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \alpha_n \leq \cdots \leq \alpha$ é uma sequência não decrescente de números racionais tais que $0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$.

Definição 4.3.3 *O número real α é o limite da sequência de números racionais α_n.*

O fato de sempre existir o limite α é uma forma de dizer que $\mathbb{R}$ é completo. Também é importante ressaltar que se $a_k = 0$, para todo $k \geq n$, então,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

e, por isso, tem-se que α é um número racional. Se α é uma dízima periódica, então, α também representa um número decimal.

Exemplo 4.3.3 1. *Seja $\alpha = 0,111\cdots$. Assim,*

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots .$$

Além disso,

$$10\alpha = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots .$$

Dessa forma, segue que

$$9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9}.$$

2. Seja $\alpha = 0,999\cdots$. *Assim,*

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{9}{9} = 1.$$

De um modo geral, segue que se $\alpha = 0, aaa\cdots$, *então,*

$$\alpha = \frac{a}{9}.$$

3. Como $1 = 0,999\cdots$, $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}$, $\frac{9}{1000} + \frac{9}{100^2} = \frac{99}{100^2}$, $\cdots$, *segue que*

$$1 = 0,999 = \cdots = \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \cdots \Rightarrow \frac{1}{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots .$$

4. Seja $\alpha = 0,3737\cdots$. *Assim,*

$$\alpha = 37\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right) = \frac{37}{99}.$$

Observação 4.3.1 *1. Toda dízima periódica simples representa um número decimal, chamado de Geratriz (ou Função Geratriz).*

2. A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo denominador é o período e o denominador é formado por tantos 9 *quanto o número de algarismos do numerador.*

(a) $0,521521\cdots = \frac{521}{999}$.

(b) $0,0000100001\cdots = \frac{1}{9999}$.

3. A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual a parte não periódica multiplicada pela uma sequência de 9 *igual ao número de elementos acrescida de um período e cujo denominador é formado por tantos nove quantos são os algoritmos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

(a) Se $\alpha = 0,35172172\cdots$, *então,*

$$100\alpha = 37 + 0.172172\cdots = 35 + \frac{172}{999} =$$

$$= \frac{35.999 + 172}{999} \Rightarrow \alpha = \frac{35.999 + 172}{99900}.$$

(b) Se $\alpha = 1,2555\cdots$, *então,*

$$10\alpha = 12 + 0.555\cdots = 12 + \frac{5}{9} = \frac{12.9 + 5}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{12.9 + 5}{90}.$$

Existe uma correspondência "quase" bijetiva entre as expressões decimais e os números reais. Não há dúvida da sobrejetividade, ou seja, todo número real está associado a uma expressão decimal. Contudo, a injetividade está "*Sub judice*", visto que um número pode ter duas expressões decimais como, por exemplo,

$$0,999\cdots = 1 = 1,000\cdots.$$

O problema ocorre quando são consideradas as expressões decimais terminadas em uma sequência infinita de noves e, por isso, a injetividade fica obtida quando essas expressões são excluídas. Outra observação importante está relacionada com as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), que não funcionam muito bem com expressões decimais. Por exemplo, para a soma $\alpha + \beta$ de duas representações decimais, considera-se um número natural n e efetua-se a soma nas aproximações α_n e β_n, obtendo uma aproximação cada vez mais precisa para a soma, tomando valores de n cada vez maiores.
Cantor provou que não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ e, por essa razão, existem diferentes números cardinais infinitos.

Definição 4.3.4 *Um conjunto finito ou um conjunto que tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$ é chamado de Enumerável. Caso contrário, o conjunto é chamado de Não Enumerável.*

Exemplo 4.3.4

1. *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n,n\in\mathbb{N}} A_i$, onde A_i são conjuntos enumeráveis, são todos exemplos de conjuntos enumeráveis.*
2. *$\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de conjuntos não enumeráveis.*

4.4 Desigualdades

Para representar que um número real é positivo, escreve-se $x > 0$, o que nos leva a seguinte definição.

Definição 4.4.1 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ *é o chamado conjunto dos números positivos.*

As propriedades básicas do conjunto dos números positivos são todas derivadas dos seguintes axiomas:

Axioma 4.4.1

1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se uma, e somente uma, das possibilidades: $x > 0$, $x = 0$ ou $-x > 0$.*
2. *Para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $x + y, x.y \in \mathbb{R}_+$.*

Observação 4.4.1

1. *Tem-se que $-x$ é o correspondente de x que não está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e, por isso, $-x$ é o número que $-x + x = 0$. Se $-x > 0$, então diz-se que x é negativo e escreve-se $x < 0$.*

2. *As desigualdades entre os números reais se reduzem ao conhecimento dos números positivos, visto que se* $x < y$*, então,* $y - x > 0$*.*

Teorema 4.4.1 *As propriedades essenciais da relação* $x < y$ *(ou* $y > x$*) são:*

1. *Tricotomia:* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ *vele uma, e somente uma, das alternativas:* $x < y$*,* $x = y$ *ou* $y < x$*.*

2. *Transitividade: Se* $x < y$ *e* $y < z$*, então,* $x < z$*.*

3. *Monotonicidade da adição: Se* $x < y$*, então,* $x + z < y + z$*, para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$*.*

4. *Monotonicidade da multiplicação: Se* $x < y$ *e* $z > 0$*, então,* $xz < yz$*, para todo* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

5. *Se* $x_1 < y_1$ *e* $x_2 < y_2$*, então,* $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$*.*

6. *Se* $0 < x_1 < y_1$ *e* $0 < x_2 < y_2$*, então,* $x_1x_2 < y_1y_2$*.*

7. *Se* $x \neq 0$*, então,* $x^2 > 0$*.*

8. *Se* $0 < x < y$*, então,* $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$*.*

9. *Se* $x < y$ *e* $z < 0$*, então,* $yz < xz$*.*

Demonstração:

1. Considere o número real $y - x$. Do Axioma 4.4.1 (1), tem-se que uma, e somente uma, das alternativas acontece: $x - y < 0$, $x - y = 0$ ou $x - y > 0$. Assim, tem-se que uma, e somente uma, das alternativas acontece: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

2. Sabendo que $x < y$ e $y < z$, então, $y - x > 0$ e $z - y > 0$. Assim, do Axioma 4.4.1 (2), segue que:
$$(y - x) + (z - y) > 0 \Rightarrow z - x > 0 \Rightarrow x < z.$$

3. Se $x < y$, então, $y - x > 0$ e, consequentemente,
$$0 < y-x = y+z-z-x = (y+z)-(x+z) \Rightarrow (y+z)-(x+z) > 0 \Rightarrow x+z < y+z.$$

4. Se $x < y$, então, $y - x > 0$ e, consequentemente, $(y - x)z > 0$ (Axioma 4.4.1 (2)). Portanto,
$$(y - x)z > 0 \Rightarrow yz - xz > 0 \Rightarrow xz < yz.$$

5. Se $x_1 < y_1$, então, pelo item (3), segue que $x_1 + x_2 < y_1 + x_2$. Analogamente, $x_2 < y_2$, então, pelo item (3), segue que $x_2 + y_1 < y_2 + y_1$. Assim, como $y_1 + x_2 = x_2 + y_1$ (comutatividade da soma de números reais), segue que $x_1 + x_2 < y_2 + y_1$.

6. Se $0 < x_1 < y_1$ e $0 < x_2$, então, pelo item (4), segue que $x_1x_2 < y_1x_2$. Analogamente, $0 < x_2 < y_2$ e $0 < y_1$, então, pelo item (4), segue que $x_2y_1 < y_2y_1$. Assim, como $y_1x_2 = x_2y_1$ (comutatividade do produto de números reais), segue que $x_1x_2 < y_2y_1$.

7. Se $x > 0$, então, $x.x > 0.x = 0$ e, consequentemente, $x^2 = x.x > 0$. Por outro lado, se $x < 0$, então, $-x > 0$ e, por isso, $(-x)(-x) > 0(-x) = 0$ e, por isso, $x^2 = (-x)(-x) > 0$. Portanto, se $x \neq 0$, segue que $x^2 > 0$.

8. Observe que se $x > 0$, então, $\dfrac{1}{x} > 0$, visto que $\dfrac{1}{x} = x.\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ e sendo $x, \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 > 0$, segue que $\dfrac{1}{x} > 0$. De maneira análoga, sendo $xy > 0$, conclui-se que $\dfrac{1}{xy} > 0$. Assim,

$$x < y \Rightarrow x.\frac{1}{xy} < y.\frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

9. Se $x < y$ e $z < 0$, então, $y - x > 0$ e $-z > 0$. Logo,

$$(y-x)(-z) > 0 \Rightarrow -yz + xz > 0 \Rightarrow yz < xz.$$

□

Observação 4.4.2 *A desigualdade $x < y$ pode ser interpretada de três maneiras:*

- *Geometricamente: dizer que $x < y$ implica que no eixo orientado tem-se que o ponto de abscissa x está a esquerda do ponto de abscissa y.*
- *Algebricamente: $x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow$ existe um número real $d > 0$ tal que $y = x + d$.*
- *Numericamente: Sejam as expressões decimais dos números x e y dadas por:*

$$x = a_0, a_1a_2 \cdots a_n \cdots \quad e \quad y = b_0, b_1b_2 \cdots b_n \cdots .$$

Então:

  - *$x < 0 < y$. Se isso não ocorre,*
  - *$a_0 < b_0$. Se isso não ocorre,*
  - *$a_0 = b_0$ e $a_1 < b_1$. Se isso não ocorre,*
  - *$a_0 = b_0$, $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$. Me uma maneira geral, se não ocorreu para $a_{k-1} < b_{k-1}$, tem-se que:*
  - *$a_i = b_i$, para todo $i < k$ e $a_k < b_k$.*

4.5 Intervalos

Definição 4.5.1 *Diz-se que x é menor do que ou igual a y, e escreve-se $x \leq y$, se $x < y$ ou $x = y$.*

Definição 4.5.2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ a seguir são chamados de Intervalos:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$;
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$;
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$;
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$;
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$;
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

Os quatro primeiros intervalos são limitados com extremos a e b. Os demais são são intervalos ilimitados.

Observação 4.5.1

1. *Se $a = b$, o intervalo $[a, b] = \{a\}$ é chamado de Degenerado.*
2. *Os demais intervalos limitados com $a = b$ são vazios.*
3. *$-\infty$ e $+\infty$ não são números, são apenas parte da notação.*

Teorema 4.5.1 *Todo intervalo não degenerado de números reais possui números racionais e irracionais.*

Demonstração: Seja (a, b) um intervalo não degenerado. Assim, $b > a$ e, dessa forma, pode-se definir o número positivo $c = b - a$. Considere um número natural n tal que $n > \dfrac{1}{c}$, então, $c < \dfrac{1}{n}$.

Tem-se que os números racionais $0, \pm\dfrac{1}{n}, \pm\dfrac{2}{n}, \cdots$ se espalham espaçadamente por toda a reta numérica, sendo que a distância entre dois números consecutivos é $\frac{1}{n}$ e, consequentemente, menor do que $c = b - a$. Logo, como não é possível obter um número $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{k}{n} < a < b < \dfrac{k+1}{n}$, segue que existe um número racional da forma $\dfrac{k}{n}$ entre a e b.

Com uma ideia similar, considerando um número natural n tal que $n > \dfrac{\sqrt{2}}{c}$, então, $c < \dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Além disso, considerando a sequência $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{n}, \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{n}, \cdots$, conclui-se que existe um número irracional da forma $\dfrac{k\sqrt{2}}{n}$ entre a e b. Portanto, entre a e b existem números racionais e números irracionais. $\square$

4.6 Valor Absoluto

Definição 4.6.1 *O Valor Absoluto (ou Módulo) de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

Exemplo 4.6.1 *Tem-se que $|x-3| = x-3$, se $x \geq 3$ e $|x-3| = 3-x$, se $x < 3$.*

Observação 4.6.1

1. *Tem-se que $|x| = \sqrt{x^2}$, onde $\sqrt{a}$ é o número real não negativo tal que o seu quadrado é a.*

2. *Se x e y são, respectivamente, as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo E, então, $|x-y|$ é a distância entre os pontos X e Y.*

Exemplo 4.6.2

1. *Tem-se que $|x-2| = 3$ pode ser interpretado como sendo o número que está a uma distância igual a 3 do dois, ou seja, $x = -1$ ou $x = 5$.*

2. *Se $|x-a| < \epsilon$, com $\epsilon > 0$, então, x está a uma distância menor do que ϵ de a e, por isso, $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, o que leva a:*

$$\{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

Teorema 4.6.1 *(Propriedades do valor absoluto) Para quaisquer números reais x e y, segue que:*

1. *$|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade triangular);*

2. *$|xy| = |x||y|$.*

Demonstração:

1. Tem-se que $x \leq |x| = \max\{x, -x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, $y \leq |y|$. Assim, $x+y \leq |x|+|y|$. Por outro lado, $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$, o que leva a $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Dessa forma,

$$|x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\} \leq |x| + |y|.$$

2. Tem-se que:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$

$\square$

4.7 Sequências e Progressões

Definição 4.7.1 *Uma Sequência é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Notação:*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots).$$

Numa sequência (x_n) o elemento x_n é chamado de n-ésimo termo da sequência. Lembre-se que $1 \mapsto x_1$, $2 \mapsto x_2$, $\cdots, n \mapsto x_n, \cdots$ e, por isso, cada número natural está associado a um elemento x_n.

Exemplo 4.7.1 *Progressão Aritmética - PA: Numa PA, cada elemento da sequência é obtido do elemento anterior acrescido da razão r. Assim,*

$$a_1 = a_1;$$

$$a_2 = a_1 + r;$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r;$$

$$\vdots$$

Portanto, o termo geral de uma PA fica dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que se $r > 0$, então, $a_n > a_m$ se $n > m$ e, por isso, diz-se que a PA é crescente. Se $r = 0$, então, $a_n = a_m$, para todo n, m e, nesse caso, a PA é constante. Por fim, se $r < 0$ tem-se que $a_n < a_m$ quando $n > m$ e, por isso, diz-se que a PA é decrescente. Uma interpretação de uma PA é que ela pode ser pensada como sequência de pontos sobre uma reta, todos a mesma distância dos seus vizinhos mais próximos de uma mesma distância.

Definição 4.7.2 *Uma sequência finita (ou lista) é uma função $f : I_n \to \mathbb{R}$, onde $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Nesse caso, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é uma sequência com n termos.*

Exemplo 4.7.2

1. *O par ordenado (x_1, x_2) é uma sequência finita com 2 elementos.*
2. *O terno ordenado (x_1, x_2, x_3) é uma sequência finita com 3 elementos.*

Exemplo 4.7.3 *Progressão Geométrica - PG: Numa PG, cada elemento da sequência é obtido do elemento anterior multiplicado por uma razão r. Assim,*

$$a_1 = a_1;$$

$$a_2 = a_1 \cdot r;$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2;$$

$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1};$$
$$\vdots$$

Portanto, o termo geral de uma PG fica dado por

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se dos produtos notáveis que $1 - r^{n+1} = (1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n)$ *e, por isso, a soma dos* $n+1$ *primeiros termos da PG* : $(1, r, r^2, \cdots, r^n)$ *fica dada por*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \ \textit{se } r \neq 1.$$

Assim, para uma PG qualquer, como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 + x_1 r + x_1 r^2 + \cdots + x_1 r^{n-1}$, *segue que*

$$= x_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) = x_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Observe que se $r > 1$, *então,* $a_n > a_m$ *se* $n > m$ *e, por isso, diz-se que a PG é crescente. Se* $0 < r < 1$, *então,* $a_n < a_m$, *para todo* n, m *e, nesse caso, a PG é decrescente. Se* $r = 1$, *tem-se que* $a_n = a_1$ *para todo* n *e, por isso, diz-se que a PG é constante. Quando* $r = 0$, *a PG é da forma* $(a_1, 0, 0, \cdots)$ *e, por isso, a PG é dita ser estacionária. Por fim, quando* $r < 0$, *a PG é dita ser alternada.*

Definição 4.7.3 *Uma sequência* (x_n) *é dita ser monótona quando*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

ou

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

para todo n. *A primeira é dita ser uma sequência monótona não decrescente e a segunda não crescente. Caso* $x_n < x_{n+1}$, *para todo* n, *a sequência é chamada de crescente. Se* $x_n > x_{n+1}$, *para todo* n, *a sequência é chamada de decrescente.*

Definição 4.7.4 *Uma sequência* (x_n) *é dita ser limitada se existe um número* $c \in \mathbb{R}$, *tal que* $x_n \leq c$, *para todo* n.

Teorema 4.7.1 *Se uma sequência monótona não decrescente de números naturais* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ *é limitada, então, existe um índice* k *tal que* $x_k = x_t$, *para todo* $t > k$.

Demonstração: Suponha, por absurdo que $x_k < x_t$, para todo $t < n$. Como $x_k \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe um número $m \in \mathbb{N}$, tal que $m - 1 < c \leq m$ e, por isso, $x_k \leq m$, para todo n. Logo, $x_n < x_{n+1} = x_n + r_1 < x_{n+2} = x_n + r_1 + r_2 < \cdots < x_{n+m} = x_n + r_1 + r_2 + \cdots + r_m$. Como $r_i \geq 1$, segue que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m \geq m$ e, por isso, $m < x_{n+m} \leq m$, gerando um absurdo. $\square$

Exemplo 4.7.4 *1. A sequência* $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ *é uma sequência crescente limitada.*

2. A sequência (n), $n \in \mathbb{N}$ *é uma sequência ilimitada.*

Solução:

1. Observe que

$$x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1,$$

   o que é verdade para todo n. Logo, a sequência é crescente. Por outro lado, como

$$n \leq n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1, \ \forall \ n,$$

   e, por isso, a sequência é limitada por 1.

2. Do Teorema 4.7.1, seque que essa sequência de números naturais não é limitada, visto que ela é monótona e $n = x_n < x_m = m$ sempre que $n < m$.

$\square$

Definição 4.7.5 *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é dito ser um conjunto de valores aproximados por falta do número real* α*, quando cumpre as seguintes condições:*

1. $\forall \ x \in X$*, tem-se que* $x \leq \alpha$*;*

2. $\forall \ \epsilon > 0$*, existe* $x \in X$ *tal que* $0 < \alpha - x < \epsilon$*.*

Exemplo 4.7.5 *O conjunto* $X = \{0,9; 0,99; 0,999, \cdots\}$ *é um conjunto de valores aproximados de* 1*. Esse conjunto poderia ser um conjunto aproximado de outro número diferente de* 1*? A Resposta é não.*
De fato*: suponha que o conjunto* $X = \{0,9; 0,99; 0,999, \cdots\}$ *seja um conjunto aproximado de 1 e* α*. Como* $\alpha > 1$*, seja* $\epsilon = \frac{\alpha - 1}{2}$*. Então, existe um* $x \in X$ *tal que* $\alpha - x < \epsilon$ *e, consequentemente,* $1 - x < \epsilon$*. Daí,*

$$\alpha - x < \epsilon = \frac{\alpha - 1}{2} \Rightarrow 2\alpha - 2x < \alpha - 1 \Rightarrow \alpha + \alpha - x < \alpha + x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha - x < x - 1 \Rightarrow 0 < \alpha - x < x - 1 < 0,$$

o que gera um absurdo. Logo, X *não é um conjunto de valores aproximado para* α*.*

Teorema 4.7.2 *Os números* x_n *de uma sequência monótona limitada* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ *formam um conjunto de valores aproximados de um número real* α*, chamado de Limite da Sequência* (x_n)*.*

Demonstração: Sejam as expressões decimais de cada x_n dada como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{10}, a_{11}a_{12}\cdots a_{1k}\cdots \\ x_2 &= a_{20}, a_{21}a_{22}\cdots a_{2k}\cdots \\ x_3 &= a_{30}, a_{31}a_{32}\cdots a_{3k}\cdots \\ &\vdots \qquad \vdots \\ x_n &= a_{n0}, a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nk}\cdots \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, segue que $a_{nk} \leq 9$ e, consequentemente, a sequência $a_{1k} \leq a_{2k} \leq a_{3k} \leq \cdots a_{nk} \leq \cdots$ de números reais passa a ser constante depois de um certo índice, ou seja, para um determinado n_k, tem-se a igualdade $a_{nk} = a_{n_k k}$, para todo $n > n_k$.
Considere o número α cuja expressão decimal é dada por

$$\alpha = a_0, a_1a_2\cdots a_n\cdots, \text{ com } a_n = a_{n_k k}.$$

Então, tem-se que $\alpha - x_n \geq 0$, para todo n. Além disso, como $\alpha - x_n < \dfrac{1}{10^n}$, segue para qualquer $\epsilon > 0$ dado, pode-se tomar um número natural k suficientemente grande (por exemplo, $k > 1/\epsilon$) para que $\dfrac{1}{10^k} < \epsilon$ e, consequentemente, $\alpha - x_k < \epsilon$, o que completa a demonstração. $\square$