1.19 Planos Tangentes e Retas Normais à Superfícies

Seja **s** uma superfície dada pela equação

$$F(x, y, z) = 0$$

e seja $A = (a, b, c)$ um ponto em **s**. Dessa forma, temos que $F(A) = 0$. Suponha também que **c** seja uma curva em **s**, que passa por A, com equação vetorial dada por

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Seja t_0 o valor do parâmetro t no ponto A, ou seja, o valor de t tal que $\mathbf{c}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = A$. Como a curva **c** está na superfície **s**, temos que

$$F(\mathbf{c}(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Se $F_x(A)$, $F_y(A)$ e $F_z(A)$ são contínuas e nem todas nulas, e se $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ e $z'(t_0)$ existem, então, a derivada total de F em relação a t, em A, é dada por:

$$G'(t_0) = F_x(A)x'(t_0) + F_y(A)y'(t_0) + F_z(A)z'(t_0),$$

que, usando a notação vetorial, pode ser reescrita por

$$G'(t_0) = \nabla F(A) \cdot D_t\mathbf{c}(t_0).$$

Como $G'(t_0) = 0$, segue que $\nabla F(A) \cdot D_t\mathbf{c}(t_0) = 0$. Tendo que o vetor $D_t\mathbf{c}(t_0)$ é tangente a curva **c** em A, ou seja, ele tem a mesma direção do vetor unitário **U**, segue que o vetor $\nabla F(A)$ é ortogonal ao vetor unitário **U**. Sendo **c** uma curva qualquer em S passando por A, segue que $\nabla F(A)$ é ortogonal a qualquer vetor **U** tangente a qualquer curva $\mathbf{c} \subset \mathbf{s}$, no ponto A. Essa ideia é a motivadora para a próxima definição.

Definição 1.19.1 *Um vetor que é ortogonal ao vetor unitário tangente a toda curva **c**, num ponto A, sobre uma superfície **s** é chamado de **Vetor Normal** à **S** em A.*

■

Teorema 1.19.1 *Se a equação de uma superfície **s** é dada por $F(x, y, z) = 0$, sendo F_x, F_y e F_z contínuas e nem todas nulas no ponto $A = (a, b, c) \in \mathbf{s}$, então, um vetor normal a **s** em A é dado por $\nabla F(A)$.*

Demonstração: Exercício. ■

Definição 1.19.2 *Seja a equação de uma superfície **s** dada por $F(x, y, z) = 0$. O **Plano Tangente** a **s** no ponto $A = (a, b, c) \in s$, denotado por $T_A\mathbf{s}$, é o plano que passa por A e que tenha $\nabla F(A)$ como vetor normal.*

■

Como $\nabla F(A)$ é um vetor normal a qualquer vetor

$$\overrightarrow{AP} = (x-a, y-b, z-c),$$

onde $P=(x,y,z)$ é um ponto qualquer do plano tangente $T_A\mathbf{s}$, temos que $T_A\mathbf{s} : \nabla F(A) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ e, consequentemente, uma equação para o plano tangente fica dada por

$$T_A\mathbf{s} : F_x(A)(x-a) + F_y(A)(y-b) + F_z(A)(z-c) = 0.$$

AA Figura 1.28 ilustra a representação do plano tangente $T_A\mathbf{s}$ à superfície $\mathbf{s}$ em A e o $\nabla F(A)$, tendo seu ponto inicial em A.

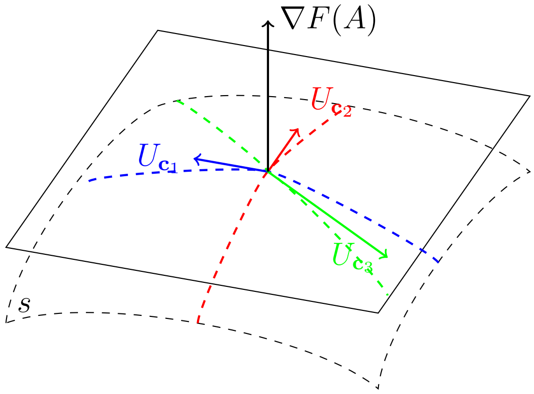

Figura 1.28: Representação Geométrica do Plano Tangente de s no ponto A.

Dessa forma, uma equação vetorial para o plano tangente $T_A\mathbf{s}$ à superfície $\mathbf{s}$ no ponto A fica dado por:

$$T_A\mathbf{s} : \nabla F(A) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0. \tag{1.9}$$

Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.19.1 *Encontre uma equação para o plano tangente $T_A\boldsymbol{s}$ ao paraboloide elíptico $\boldsymbol{s} : 4x^2 + y^2 - 16z = 0$ no ponto $A = (2,4,2)$.*

Solução: Seja $\mathbf{s} : F(x,y,z) = 4x^2+y^2-16z$. Então, temos que $\nabla F(x,y,z) = (8x, 2y, -16)$ e, consequentemente, $\nabla F(2,4,2) = (16,8,-16) = 8(2,1,-2)$. Assim, usando a Equação 1.9, segue que o plano tangente $T_A\mathbf{s}$ fica dado por:

$$T_A\mathbf{s} : (2,1,-2)\cdot(x-2, y-4, z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A\mathbf{s} : 2(x-2) + 1(y-4) - 2(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A\mathbf{s} : 2x + y - 2z - 4 = 0.$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.19.2 *Encontre uma equação para o plano tangente $T_A\boldsymbol{s}$ à superfície $\boldsymbol{s}$ dada por $z = e^{3x}\operatorname{sen}(3y)$ no ponto $A = \left(0, \frac{\pi}{6}, 1\right)$.*

Solução: Seja $\mathbf{s} : F(x, y, z) = e^{3x}\text{sen}(3y) - z$. Então, temos que $\nabla F(x, y, z) = (3e^{3x}\text{sen}(3y), 3e^{3x}\cos(3y), -1)$ e, consequentemente, $\nabla F\left(0, \frac{\pi}{6}, 1\right) = (3, 0, -1)$. Assim, usando a Equação 1.9, segue que o plano tangente $T_A\mathbf{s}$ fica dado por:

$$T_A\mathbf{s} : (3, 0, -1) \cdot \left(x - 0, y - \frac{\pi}{6}, z - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A\mathbf{s} : 3x + 1 - z = 0 \text{ e } y = \frac{\pi}{6}.$$

■

Agora apresentaremos a definição de *Reta Normal* a uma superfície **s** num ponto A.

Definição 1.19.3 *A* ***Reta Normal*** *de uma superfície* ***s****, num ponto $A \in S$, denotado por n_A, é a reta que passa por A e tem como vetor diretor um vetor normal a* ***s*** *em A.*

■

Em outras palavras, se a equação de uma superfície **s** é da forma $F(x, y, z) = 0$, então, a reta normal n_A é a reta que passa por A e tem $\nabla F(A)$ como vetor diretor, ou seja, a reta normal n_A num ponto A é uma reta ortogonal ao plano tangente nesse ponto. Assim, as equações simétricas da reta normal a **s** em $A = (a, b, c)$ ficam dadas por

$$n_A : \frac{x - a}{F_x(A)} = \frac{y - b}{F_y(A)} = \frac{z - c}{F_z(A)}, \tag{1.10}$$

se $F_x(A) \neq 0$, $F_y(A) \neq 0$ e $F_z(A) \neq 0$. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.19.3 *Encontre as equações simétricas da reta normal n_A à superfície* ***s*** *do Exemplo 1.19.1 no ponto $A = (2, 4, 2)$.*

Solução: Como $\nabla F(2, 4, 2) = 8(2, 1, -2)$, segue que as equações simétricas da reta normal n_A requeridas são

$$n_A : \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}.$$

■

Exemplo 1.19.4 *Encontre as equações simétricas da reta normal n_A à superfície* ***s*** *do Exemplo 1.19.2 no ponto $A = \left(0, \frac{\pi}{6}, 1\right)$.*

Solução: Como $\nabla F\left(0, \frac{\pi}{6}, 1\right) = (3, 0, -1)$, segue que as equações simétricas da reta normal n_A requeridas são

$$n_A : \frac{x - 0}{3} = \frac{z - 1}{-1} \text{ e } y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow n_A : x = 3 - 3z \text{ e } y = \frac{\pi}{6}.$$

■

Exemplo 1.19.5 *Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$, no ponto $A = (1, -1, 2)$.*

Solução: Considere $F(x, y, z) = xyz+x^3+y^3+z^3-3z$. Dessa forma, temos que $\nabla F(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$ e, consequentemente, $\nabla F(A) = (1, 5, 8)$. Dessa forma, o plano tangente $T_A\mathbf{S}$ a superfície $\mathbf{S}$, no ponto A, fica dado por

$$T_A\mathbf{S} : \nabla F(A) \cdot [(x, y, z) - A] = (1, 5, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A\mathbf{s} : 1 \cdot (x-1)+5 \cdot (y+1)+8 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow T_A\mathbf{s} : x+5y+8z-12 = 0,$$

e, por isso, o plano tangente $T_A\mathbf{s}$ fica dado por

$$T_A\mathbf{s} : x + 5y + 8z = 12.$$

Por outro lado, a reta normal n_A é a reta que passa por A e tem vetor como diretor um vetor paralelo à $\nabla F(A) = (1, 5, 8)$ e, por isso, a reta normal em A fica dada por

$$n_A : (x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 5, 8) = (1 + t, -1 + 5t, 2 + 8t),\ t \in \mathbb{R}.$$

■

A próxima definição é da *Reta Tangente* a uma curva $\mathbf{c} \subset \mathbf{s}$, em A, e que é paralela ao vetor unitário $\mathbf{U}$.

Definição 1.19.4 *A* ***Reta Tangente*** *a uma curva* $\boldsymbol{c}$ *num ponto A, denotada por t_A, é a reta que passa por A e é paralela ao vetor unitário* $\boldsymbol{U}$ *tangente a* $\boldsymbol{C}$ *em A.*

■

Como $\nabla F(A)$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AP} = (x - a, y - b, z - c) \in \mathbf{c} \subset \mathbf{s}$, sendo $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer da reta tangente t_A, segue que $\nabla F(A) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ e, consequentemente

$$t_A : F_x(A)(x - a) + F_y(A)(y - b) + F_z(A)(z - c) = 0.$$

Exemplo 1.19.6 *Encontre uma equação para a reta tangente t_A a superfície* $\boldsymbol{s} : x^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 8$, *no ponto $A = (25, 2, 9)$.*

Solução: Considere $\mathbf{S} : F(x, y, z) = x^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} - 8$. Assim, temos que $\nabla F(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, 0, \dfrac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}\right)$. Daí, no ponto A, temos $\nabla F(A) = \left(\dfrac{1}{10}, 0, \dfrac{1}{6}\right)$. Portanto, uma equação para a reta tangente t_A fica dada por

$$t_A : \nabla F(A) \cdot (x - 25, y - 2, z - 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_A : \left(\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{6}\right) \cdot (x - 25, y - 2, z - 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_A : 3x + 5z - 120 = 0 \text{ e } y = 2.$$

■

Todas as retas tangentes t_A, ao ponto A, das curvas $\mathbf{c} \subset \mathbf{s}$ situadas sobre uma superfície $\mathbf{s}$, estão no plano tangente $T_A\mathbf{s}$ da superfície em A.

Considere uma curva $\mathbf{c}$ que seja dada pela interseção de suas superfícies, digamos $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$, que tenham equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, respectivamente, como visto na Figura 1.29.

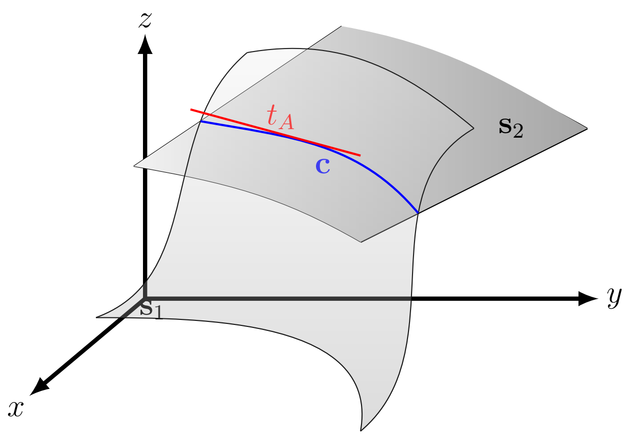

Figura 1.29: Representação Geométrica do Plano Tangente de S no ponto A.

Podemos obter uma equação da reta tangente t_A, à $\mathbf{c}$, no ponto $A = (a, b, c) \in \mathbf{c} \subset \mathbf{s}$. Para isso, como essa reta pertence a cada um dos planos tangentes $T_A\mathbf{s}_1$ e $T_A\mathbf{s}_2$ das superfícies $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$, respectivamente, em A, ela é a reta de intersecção dos dois planos tangentes. Dessa forma, como um vetor normal à superfície $\mathbf{s}_1$, em A, é dada por

$$N_1 = \nabla F(A)$$

e um vetor normal à superfície $\mathbf{s}_2$, em A, é dada por

$$N_2 = \nabla G(A),$$

segue que N_1 e N_2 são vetores ortogonais a um vetor unitário $\mathbf{U}$ tangente a $\mathbf{c}$ em A. Além disso, como $\pm N_1 \times N_2$ são vetores ortogonais a N_1 e N_2, segue que $\mathbf{U}$ tem a mesma direção dos vetores $\pm N_1 \times N_2$. Portanto, $N_1 \times N_2$ pode ser usado como vetor diretor para a reta tangente t_A dada por $T_A\mathbf{s}_1 \cap \mathbf{s}_2$.

Exemplo 1.19.7 *Determine equações simétricas da reta tangente à curva de intersecção da superfície* $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49$ *e* $x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$*, no ponto* $(3, -3, 2)$.

Solução: Seja $F(x, y, z) = 3x^2+2y^2+z^2-49$ e $G(x, y, z) = x^2+y^2-2z^2-10$. Então,

$$N_1 = \nabla F(3, -3, 2) = (6x, 4y, 2z)|_{(x,y,z)=(3,-3,2)} = (18, -12, 4) = 2(9, -6, 2)$$

e

$$N_2 = \nabla G(3, -3, 2) = (2x, 2y, -4z)|_{(x,y,z)=(3,-3,2)} = (6, -6, -8) = 2(3, -3, -4).$$

Daí,

$$N_1 \times N_2 = \nabla F(3,-3,2) \times \nabla G(3,-3,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (30, 42, -9) = 3(10, 14, -3).$$

Portanto, o vetor $v = (10, 14, -3)$ pode ser usado como vetor diretor da reta tangente t_A procurada e, consequentemente, as equações simétricas dessa reta ficam dadas por

$$t_A : \frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}.$$

■

Agora, faça alguns exercícios para fixar o conteúdo.

1.20 Exercícios

Exercício 1.20.1 *Nos itens a seguir, encontre uma equação para o plano tangente e equações da reta normal à superfície dada no ponto indicado.*

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 17$, *em* $P = (2, -2, 3)$;

b) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$, *em* $P = (1, -2, 3)$;

c) $x^2 + y^2 - 3z = 2$, *em* $P = (-2, -4, 6)$;

d) $x^2 + y^2 - z^2 = 6$, *em* $P = (3, -1, 2)$;

e) $e^x \cos(z) = y$, *em* $P = (1, e, 0)$;

f) $x = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$, *em* $P = (1, 1, 2)$;

g) $x^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 8$, *em* $P = (25, 2, 9)$;

h) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 14$, *em* $P = (-8, 27, 1)$;

i) $z - \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0$, *em* $P = (2, 2, 3)$.

Exercício 1.20.2 *Seja* $f(x, y) = xy$. *Determine a reta tangente ao gráfico de* f, *no ponto* $(1, 2, f(1, 2))$ *que forma com o plano* XY *ângulo máximo.*

Exercício 1.20.3 *Prove que toda reta normal à esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *com* $a > 0$, *passa pelo centro da esfera.*

Exercício 1.20.4 *Prove que as esferas* $x^2+y^2+z^2 = a^2$ *e* $(x-b)^2+y^2+z^2 = (b-a)^2$ *são tangentes no ponto* $(a, 0, 0)$.

Exercício 1.20.5 *Sabendo que as duas superfícies dadas se interceptam numa curva, encontre as equações da reta tangente à curva de interseção no ponto dado. As duas superfícies são tangentes no ponto dado? Por que?*

a) $x^2 + y^2 - z = 8$ *e* $x - y^2 + z^2 = -2$*, em* $P = (2, -2, 0)$*;*

b) $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$ *e* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$*, em* $P = (0, 1, 1)$*;*

c) $y = x^2$ *e* $y = 16 - z^2$*, em* $P = (4, 16, 0)$*;*

d) $y = e^x sen(2\pi z) + 2$ *e* $z = y^2 - \ln(x + 1) - 3$*, em* $P = (0, 2, 1)$*.*

Exercício 1.20.6 *Duas superfícies são* ***Perpendiculares*** *em um ponto* P *de interseção, se os vetores normais às superfícies em* P *forem ortogonais. Mostre que a superfície* $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ *é perpendicular a todo membro da família* $x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$*, no ponto* $(1, -1, 2)$*.*

Exercício 1.20.7 *Encontre uma equação da reta tangente à curva dada pela interseção das superfícies* $\boldsymbol{S}_1 : x^2 + y^2 = 4$ $\boldsymbol{S}_2 : x^2 + y^2 - z = 0$*, no ponto* $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$*.*