2.7 Perpendicularismo e Distâncias entre planos e retas

Agora vamos trabalhar com ângulos entre retas, entre reta e plano, e entre planos. Para isso, primeiro estabeleceremos a diferença entre retas ortogonais e retas perpendiculares.

Observação 2.7.1 *Se o ângulo entre duas retas é de 90^o graus, então, essas retas são ortogonais. Contudo, se as duas retas forem coplanares e, consequentemente são concorrentes, segue que elas são chamadas de Retas Perpendiculares.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7.1 *Verifique se as retas $r : P = (1,1,1)+\alpha(2,1,-3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $s : P = (0,1,0)+\alpha(-1,2,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ são perpendiculares.*

Solução: Primeiro precisamos verificar se as retas r e s são ortogonais, ou seja, precisamos verificar se o ângulo entre os vetores diretores das duas retas formam um ângulo de 90^o. Para isso, sendo $\vec{u} = (2,1,-3)$ o vetor diretor da reta r e $\vec{v} = (-1,2,0)$ o vetor diretor da reta s, segue que se $\theta = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, então,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{2.(-1)+1.2+(-3).0}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = 0.$$

Logo, temos que $r \perp s$. Por fim, para que r e s sejam perpendiculares, precisamos verificar se pelas possuem um ponto em comum. Para isso, verificaremos se $\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)$ (onde $A \in r$ e $B \in s$) forma um conjunto LD pois, caso contrário, as retas são reversas. Assim, sendo $A = (1,1,1) \in r$ e $B = (0,1,0) \in s$, segue que $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1)$. Consequentemente,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-4-1-0-6 = -11 \neq 0.$$

Portanto, como $\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)$ forma um conjunto LI, segue que as retas r e s são reversas e, por isso, as retas r e s são ortogonais mais elas não são perpendiculares. ■

Exemplo 2.7.2 *Verifique se as retas $r : P = (1,2,3)+\alpha(1,2,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $s : P = (2,4,4)+\alpha(-1,1,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ são perpendiculares.*

Solução: Primeiro precisamos verificar se as retas r e s são ortogonais, ou seja, precisamos verificar se o ângulo entre os vetores diretores das duas retas formam um ângulo de 90^o. Para isso, sendo $\vec{u} = (1,2,1)$ o vetor diretor da reta r e $\vec{v} = (-1,1,-1)$ o vetor diretor da reta s, segue que se $\theta = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, então,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{-1+2-1}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = 0.$$

Logo, temos que $r \perp s$. Por fim, para verificar se r e s são retas perpendiculares, precisamos verificar se pelas possuem um ponto em comum. Para isso, verificaremos se $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (onde $A \in r$ e $B \in s$) forma um conjunto LD pois, caso contrário, as retas são reversas. Assim, sendo $A = (1,2,3) \in r$ e $B = (2,4,4) \in s$, segue que $\overrightarrow{AB} = (1,2,1)$ e, consequentemente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, como $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ forma um conjunto LD e $\vec{u} \perp \vec{v}$, segue que as retas r e s são concorrentes e, por isso, as retas r e s são perpendiculares. ■

Exemplo 2.7.3 *Obtenha equações paramétricas para a reta s que contenha o ponto $P = (-1,3,1)$ e que seja perpendicular a reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.*

Solução: Como a reta s contém o ponto P, então, para escrevermos as equações paramétricas para a reta s só precisamos encontrar um vetor diretor para a reta. Temos que as equações paramétricas para a reta r ficam dadas por $r : \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = 1+3\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$. Se Q é o ponto de interseção de r e s, segue existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (1+2t, 1+3t, t)$, visto que $Q \in r$. Dessa forma, temos que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ fica dado por $\overrightarrow{PQ} = (2+2t, -2+3t, t-1)$.

Como as retas r e s são perpendiculares, segue que os seus vetores diretores são ortogonais, ou seja, segue que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$. Assim,

$$(2+2t, -2+3t, t-1)\cdot(2,3,1) = 0 \Rightarrow 4+4t-6+9t+t-1 = 0 \Rightarrow 14t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{14}.$$

Logo, temos que $\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{17}{7}, -\dfrac{19}{14}, -\dfrac{11}{14}\right)$. Portanto, equações paramétricas para a reta s ficam dadas por

$$s : \begin{cases} x = -1 + \dfrac{17\alpha}{7} \\ y = 3 - \dfrac{19\alpha}{14}, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \dfrac{11\alpha}{14} \end{cases}.$$

■

Observação 2.7.2 *Seja $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal a um plano π, com equação vetorial dada por*

$$\pi : X = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano π, segue que $\vec{n} \perp \pi$ se, e somente se, $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$. Portanto, $\vec{n} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.7.4 *Obtenha uma equação geral para o plano π que contém o ponto $A=(9,-1,0)$ e que seja paralelo aos vetores $\vec{u}=(0,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$.*

Solução: Temos que o plano π fica dado por $\left|\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}\right|=0$, onde $P=(x,y,z)$ é um ponto qualquer de π. Assim, temos que

$$s:\begin{vmatrix} x-9 & y+1 & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi:(1-0)(x-9)+(0-0)(y+1)+(0-1)(z-0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: x-z-9=0.$$

Portanto, uma equação geral para o plano π fica dada por $\pi: x-z-9=0$. ■

Observação 2.7.3 *Sejam $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ planos secantes e seja $r: X=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, a reta de interseção dos dois planos. Então, temos que $\vec{u}\perp\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$, visto que $r\subset\pi_1$ e que $\vec{u}\perp\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$, visto que $r\subset\pi_2$. Portanto, temos que $\vec{u}=\alpha(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.7.5 *Obtenha equações paramétricas para a reta r dada pela interseção dos planos $\pi_1: 3x+y+2z-1=0$ e $\pi_2: 2x-y-3=0$.*

Solução: Temos que um vetor diretor para a reta r fica dado por $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, onde $\vec{n}_1=(3,1,2)$ é um vetor normal ao plano π_1 e $\vec{n}_2=(2,-1,0)$ é um vetor normal ao plano π_2. Daí, temos que

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(2,4,-5).$$

Agora para encontrar um ponto $A\in r$, considere $x=0$ nas equações dos planos. Assim, temos que $y+2z=1$ e que $y=-3$, ou seja, o ponto A fica dado por $A=(0,-3,2)$. Portanto, as equações paramétricas para a reta $r\in\pi_1\cap\pi_2$ ficam dadas por

$$s:\left|\begin{array}{lcl} x & = & 2\alpha \\ y & = & -3+4\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z & = & 2-5\alpha \end{array}\right. .$$

■

Exemplo 2.7.6 *Obtenha equações paramétricas para a reta s que contém o ponto $A=(-1,3,1)$ e que seja perpendicular a reta $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z$.*

Solução: Podemos reescrever a reta r como sendo a reta de interseção dos planos $\pi_1: x-2z-1=0$ e $\pi_2: y-3z-1=0$. Assim, temos que um vetor diretor para a reta r fica dado por $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, onde $\vec{n}_1=(1,0,-2)$ é um vetor normal ao plano π_1 e $\vec{n}_2=(0,1,-3)$ é um vetor normal ao plano π_2. Daí, temos que

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(2,3,1).$$

Portanto, equações paramétricas para a reta r ficam dadas por

$$r : \left| \begin{array}{lcl} x & = & -1+2\alpha \\ y & = & 3+3\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z & = & 1+\alpha \end{array} \right. .$$

■

Observação 2.7.4 *Se uma reta $r : P = A + \alpha\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ é perpendicular a um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, segue que r tem a mesma direção de um vetor normal a π. Por isso, como um vetor normal a π é dado por $\vec{n} = (a,b,c)$, segue que $\vec{u} \parallel \vec{n}$, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{n}$.*

Exemplo 2.7.7 *Verifique se a reta $r : P = (0,1,0) + \alpha(1,1,3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é perpendicular ao plano $\pi : P = (3,4,5) + \alpha(6,7,8) + \beta(9,10,11)$, , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Solução: Temos que a reta r é perpendicular ao plano π se, $\vec{u} \parallel \vec{n}$, onde $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π. Assim, como $\vec{u} = (1,1,3)$ e $\vec{n} = (6,7,8) \times (9,10,11)$, ou seja,

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = (-3,6,-3).$$

Como $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{1}{6}$, segue que $\vec{u} \not\parallel \vec{n}$ e, portanto, a reta r e o plano π não são perpendiculares. ■

Exemplo 2.7.8 *Verifique se a reta $r : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y - z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 2 \end{array} \right.$, é perpendicular ao plano $\pi : P = x + 2z = 14$.*

Solução: Temos que a reta r é perpendicular ao plano π se, $\vec{u} \parallel \vec{n}$, onde $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π. Assim, como $\vec{n} = (1,0,2)$ e $\vec{u} = (2,-1,-1) \times (2,1,-1)$, ou seja,

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,0,4).$$

Como $\vec{u} = 2\vec{n}$, segue que $\vec{u} \parallel \vec{n}$ e, portanto, a reta r e o plano π são perpendiculares. ■

Exemplo 2.7.9 *Determine equações simétricas para a reta r que contém o ponto $A = (-1,3,5)$ e que seja perpendicular ao plano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$.*

Solução: Como a reta r é perpendicular ao plano π, segue que $r \parallel \vec{n} = (1,-1,2)$, onde $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π. Portanto, um vetor diretor para a reta r é o vetor $\vec{n}$. Assim, as equações simétricas para a reta r ficam dadas por

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2}.$$

■

Exemplo 2.7.10 *Determine uma equação geral para o plano π que contém o ponto $A = (0,0,0)$ e que seja perpendicular a reta $r : P = (1,1,0) + \alpha(2,3,7)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Solução: Como a reta r é perpendicular ao plano π, segue que o vetor diretor $\vec{u} = (2,3,7)$ da reta r é paralelo a um vetor normal $\vec{n}$ do plano. Dessa forma, uma equação geral para o plano π fica dada por $\pi : 2x+3y+7z+d = 0$. Como $A = (0,0,0) \in \pi$, segue que $\pi : 2.0+3.0+7.0+d = 0$, ou seja, temos que $d = 0$. Portanto, uma equação geral para o plano π fica dada por

$$\pi : 2x+3y+7z = 0.$$

■

Observação 2.7.5 *Agora considere os planos π_1, com vetor normal $\vec{n}_1$, e π_2, com vetor normal $\vec{n}_2$. Temos que π_1 e π_2 são perpendiculares se, e somente se, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores ortogonais, ou seja, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.*

Exemplo 2.7.11 *Verifique se os planos $\pi_1 : P = (0,0,1)+\alpha(1,0,1)+\beta(-1,-1,1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $\pi_2 : 2x-7y+16z-40 = 0$ são perpendiculares.*

Solução: Temos que um vetor normal ao plano π_1 é dado por $\vec{n}_1 = (1,0,1) \times (-1,-1,1)$, ou seja,

$$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-1).$$

Por outro lado, um vetor normal ao plano π_2 é dado por $\vec{n}_1 = (2,-7,16)$. Assim, como

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1.2+(-2)(-7)+(-1).16 = 0,$$

segue que π_1 e π_2 são planos perpendiculares. ■

Exemplo 2.7.12 *Obtenha uma equação geral para o plano π que contém a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e que seja perpendicular ao plano π_3, sabendo que $\pi_1 : x-y+z+1 = 0$, $\pi_2 : x+y-z-1 = 0$ e $\pi_3 : x+y+2z-2 = 0$.*

Solução: Como o plano π contém a reta r, temos que qualquer ponto da reta também é um ponto do plano. Assim, para $y=0$, temos que $x+z=-1$, $x-z=1$, ou seja, $x=0$ e $z=-1$. Assim, um ponto do plano π fica dado por $A=(0,0,-1)$. Além disso, um vetor diretor $\vec{u}$ da reta r é paralelo ao plano π. Daí, temos que $\vec{u}=(1,-1,1)\times(1,1,-1)$, ou seja,

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(0,2,2)=2(0,1,1).$$

Por outro lado, como o plano π é perpendicular ao plano π_3, segue que o vetor $\vec{n}_3=(1,1,2)$ normal ao plano π_3 é paralelo ao plano π. Assim, como $\vec{u}\not\parallel\pi_3$, temos que o vetor $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{n}_3$ é um vetor normal ao plano π_3. Como

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(1,1,-1),$$

segue que uma equação geral do plano π fica dado por $\pi: x+y-z+d=0$. Como $A\in\pi$, segue que $0+0-(-1)+d=0$, temos que $d=-1$. Portanto, uma equação geral para o plano π fica dada por

$$\pi: x+y-z-1=0.$$

■

Exemplo 2.7.13 *Dadas as retas $r: P=(0,1,0)+\alpha(1,0,0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, e $s: P=(-1,2,-7)+\alpha(2,1,-3)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, obtenha uma equação vetorial para a reta t, concorrente com r e s e que seja paralela a $\vec{u}=(1,-5,-1)$.*

Solução: É importante observar que $\vec{u}\not\parallel r$ e $\vec{u}\not\parallel s$ pois, caso contrário, não existiria a reta t concorrente com r e s. Se existe tal reta, segue que as retas r e t determinam um plano π_1, pois são retas concorrentes e, de forma análoga, as retas s e t determinam um plano π_2, pois também são retas concorrentes. Além disso, temos que $t\subset\pi_1\cap\pi_2$.

Como $\vec{u}\not\parallel r$, segue que π_1 é o plano que contém r e é paralelo a $\vec{u}$. Assim, o plano π_1 contém o ponto $A=(0,1,0)$ e é paralelo ao vetores $\vec{u}=(1,-5,-1)$ e $\vec{v}=(1,0,0)$. Logo, uma equação geral do plano π_1 fica dada por

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi_1:(0-0)(x)+(-1-0)(y-1)+(0+5)(z)=0\Rightarrow$$

$$\pi_1: -y+5z+1=0.$$

Analogamente, como $\vec{u}\not\parallel s$, segue que π_2 é o plano que contém s e é paralelo a $\vec{u}$. Assim, o plano π_2 contém o ponto $B=(-1,2,-7)$ e é paralelo ao vetores $\vec{u}=(1,-5,-1)$ e $\vec{w}=(2,1,-3)$. Logo, uma equação geral do plano π_2 fica dada por

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+7 \\ 1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi_2:(15+1)(x+1)+(-2+3)(y-2)+(1+10)(z+7)=0\Rightarrow$$

$$\pi_2 : 16x + y + 11z + 91 = 0.$$

Assim, temos que se existe a reta t ela é dada pela solução do sistema

$$t : \left\{ \begin{array}{rcl} -y + 5z + 1 & = & 0 \\ 16x + y + 11z + 91 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow t : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 5z + 1 \\ 16x & = & -y - 11z - 91 \end{array} \right. .$$

Portanto, a reta t concorrente a r e s ao mesmo tempo é dada por

$$t : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{23}{4} - \alpha \\ y & = & 1 + 5\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z & = & \alpha \end{array} \right.$$

e, consequentemente, uma equação vetorial para a reta t fica dada por

$$t : P = \left(-\frac{23}{4}, 1, 0\right) + \alpha(1, 5, -1),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

Exemplo 2.7.14 *Dadas as retas $r : P = (1,1,4) + \alpha(2,1,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $s : P = (0,3,1) + \alpha(1,4,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtenha uma equação vetorial para a reta t, concorrente com r e s e que contenha o ponto $Q = (2,-1,1)$.*

Solução: Seja t a reta concorrente as retas r e s, simultaneamente. Assim, como $Q \notin r$, segue que Q e r determinam um plano π_1. Analogamente, como $Q \notin s$, segue que Q e s determinam um plano π_2. Observe que se $A = (1,1,4) \in r$, segue que π_1 fica definido por Q, $\vec{u} = (2,1,-1)$ e $\overrightarrow{AQ}$, ou seja, uma equação geral do plano π_1 fica dada por

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2-1 & -1-1 & 1-4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 : (-3-2)(x-2) + (-1+6)(y+1) + (-4-1)(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 : -5x + 5y - 5z + 20 = 0 \Rightarrow \pi_1 : x - y + z - 4 = 0.$$

Por outro lado, se $B = (0,3,1) \in s$, segue que π_2 fica definido por Q, $\vec{v} = (1,4,2)$ e $\overrightarrow{BQ}$, ou seja, uma equação geral do plano π_2 fica dada por

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} x-0 & y-3 & z-1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2-0 & -1-3 & 1-1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x-0 & y-3 & z-1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 : (0+8)x + (4-0)(y-3) + (-4-8)(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 : 8x + 4y - 12z = 0 \Rightarrow \pi_2 : 2x + y - 3z = 0.$$

Portanto, a reta t concorrente a r e s ao mesmo e que contem o ponto Q é dada por

$$t : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 4 \\ 2x + y - 3z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ou seja, a reta t fica dada por $t:\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -6+\dfrac{5\alpha}{2}, \alpha\in\mathbb{R} \\ z &= -2+\dfrac{3\alpha}{2}\end{cases}$. Consequentemente, uma equação vetorial para a reta t fica dada por

$$t:P=(0,-6,-2)+\alpha\left(1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

■

Agora vamos construir a noção de ângulos entre os objetos aqui estudados. Vamos começar falando sobre ângulos entre duas retas. Para isso, considere as retas

$$r:P=A+\alpha\vec{u},\ \alpha\in\mathbb{R},\ \text{e}\ s:P=B+\alpha\vec{v},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Assim, o ângulo entre as retas r e s será do mesmo valor que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Por isso, temos que se $\theta=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, então, temos que $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ e que, além disso,

$$\cos(\theta)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||},$$

o que nos leva a definição a seguir.

Definição 2.7.1 *O Ângulo entre duas retas $r:P=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, e $s:P=B+\alpha\vec{v}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, é o menor ângulo formado pelos vetores diretores de r e s, ou seja, sendo $\theta=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, segue que*

$$\theta=\arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}\right).$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.7.15 *Calcule o ângulo entre as retas $r:\begin{cases} x &= 2-3t \\ y &= 1+2t \\ z &= -1-t\end{cases}$ e $s:$ $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$.*

Solução: Um vetor diretor para a reta r é dado por $\vec{u}=(-3,2,-1)$ e um vetor diretor para a reta s é dado por $\vec{v}=(-2,1,1)$. Assim, sendo $\theta=\sphericalangle(r,s)=\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, segue que o cosseno entre eles fica dado por

$$\cos(\theta)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}=\frac{(-3,2,-1)\cdot(-2,1,1)}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{7}{2\sqrt{21}}.$$

Portanto, o ângulo entre as retas r e s fica dado por $\theta=\arccos\left(\dfrac{7}{2\sqrt{21}}\right)$ radianos. ■

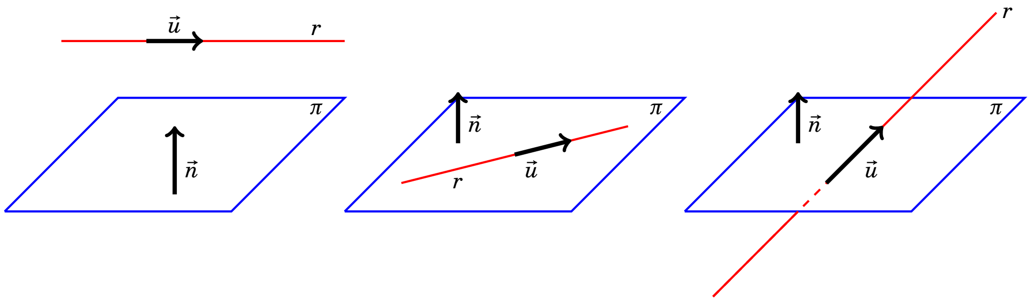
Exemplo 2.7.16 *Calcule o ângulo entre as retas* $r: P = (1,1,9)+\alpha(0,-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $s: x-y+3 = z = 4$.

Solução: Temos que um vetor diretor para a reta r fica dado por $\vec{u} = (0,-1,1)$. Por outro lado, como $s: \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -1+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z &= 4 \end{cases}$, segue que um vetor diretor para s fica dado por $\vec{v} = (1,1,0)$. Assim, sendo $\theta = \sphericalangle(r,s) = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, segue que o cosseno entre eles fica dado por

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{|(0,-1,-1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2|}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, temos que o ângulo entre as retas r e s fica dado por $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ radianos. ■

Agora falaremos de ângulo entre uma reta e um plano. Para isso, seja π um plano, com $\vec{n}$ sendo um vetor normal a π. Além disso, seja r uma reta e $\vec{u}$ um vetor diretor para r. Temos que existem três possibilidades possíveis, como ilustrado na Figura 2.9.



(a) (b) (c)

Figura 2.9: Ilustração da definição do ângulo entre uma reta e um plano.

a) Caso (a): $r \parallel \pi$ e $r \cap \pi = \varnothing$: Nesse caso, temos que $\vec{u} \parallel \pi$ e, consequentemente, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, visto que $\vec{u} \perp \vec{n}$. Além disso, temos que $A \in r$ e $A \notin \pi$.

b) Caso (b): $r \parallel \pi$ e $r \subset \pi$: Nesse caso, temos que $\vec{u} \parallel \pi$ e, consequentemente, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, visto que $\vec{u} \perp \vec{n}$. Além disso, temos que $A \in r$ e $A \in \pi$.

c) Caso (c): $r \nparallel \pi$: Nesse caso, temos que $\vec{u} \nparallel \pi$ e, consequentemente, $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$, visto que $\vec{u} \not\perp \vec{n}$.

Observe que o ângulo entre r e π, chamado de $\theta = \sphericalangle(r,\pi)$, fica dado pelo ângulo complementar $\phi = \sphericalangle(\vec{u},\vec{n})$, entre $\vec{u}$ e $\vec{n}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$, o que nos leva a definição a seguir.

Definição 2.7.2 *Sejam* r *uma reta, com vetor diretor* $\vec{u}$*, e* π *um plano, com vetor normal* $\vec{n}$*. Assim, o ângulo* $\theta = \sphericalangle(r,\pi)$ *é dado por* $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$*, onde* $\phi = \sphericalangle(\vec{u},\vec{n})$.

Observação 2.7.6 *Da mesma forma que entre duas retas, o ângulo entre uma reta r e um plano π fica dado por $0 \leq \sphericalangle(r,\pi) \leq \dfrac{\pi}{2}$. Além disso, sendo $\vec{u}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π, segue que se $\phi = \sphericalangle(\vec{u},\vec{n})$, então,*

$$\cos(\phi) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}.$$

Dessa forma, como $\theta = \sphericalangle(r,\pi)$ é dado por $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \phi \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ e como

$$\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)sen(\theta) = sen(\theta),$$

segue que o ângulo entre a reta r e o plano π satisfaz a identidade

$$sen(\theta) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.7.17 *Obtenha a medida do ângulo entre a reta $r : P = (0,1,0) + \alpha(-1,-1,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e o plano $\pi : y + z - 10 = 0$.*

Solução: Um vetor diretor $\vec{u}$ para a reta r é dada por $\vec{u} = (-1,-1,0)$. Por outro lado, um vetor normal $\vec{n}$ ao plano π fica dado por $\vec{n} = (0,1,1)$. Dessa forma, temos que

$$sen(\theta) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{|(-1,-1,0)\cdot(0,1,1)|}{||(-1,-1,0)||\cdot||(0,1,1)||} = \frac{|0-1+0|}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, temos que $\theta = arcsen\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ radianos. ■

Exemplo 2.7.18 *Obtenha uma equação vetorial para a reta r que passa pelo ponto $A = (1,1,1)$, que é paralela ao plano $\pi_1 = x + 2y - z = 0$ e que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$ radianos com o plano $\pi_2 : x - y + 2z - 1 = 0$.*

Solução: Temos que obter um vetor diretor para a reta r, visto que $A = (1,1,1) \in r$. Assim, seja $\vec{u} = (x,y,z)$ o vetor diretor de r. Como $r \parallel \pi_1$, segue que $\vec{u}\cdot\vec{n}_1 = 0$, onde $\vec{n}_1 = (1,2,-1)$ é um vetor normal ao plano π_1, ou seja,

$$\vec{u}\cdot\vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(1,2,-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + 2y.$$

Por outro lado, sendo $\theta = \sphericalangle(r,\pi_2)$, segue que $sen(\theta) = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}_2|}{||\vec{u}||\cdot||\vec{n}_2||}$, onde $\vec{n}_2$ é um vetor normal ao plano π_2, ou seja,

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|(x,y,z)\cdot(1,-1,2)|}{||(x,y,x+2y)||\cdot||(1,-1,2)||} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|x-y+2(x+2y)|}{\sqrt{x^2+y^2+(x+2y)^2}\cdot\sqrt{1+1+4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3|x+y|}{x^2+y^2+(x+2y)^2} \Rightarrow 36(x+y)^2 = 18(x^2+y^2+(x+2y)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+4xy+2y^2 = 2x^2+4xy+5y^2 \Rightarrow 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Dessa forma, como $z = x+2y$, segue que $z = x$ e, consequentemente, temos que $\vec{u} = (x, y, z) = x(1,0,1)$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, uma equação vetorial para a reta r fica dada por

$$r : P = (1,1,1) + \alpha(1,0,1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

O próximo passo é estabelecer uma forma de obter o ângulo entre dois planos. Para isso, considere os planos $\pi_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, com os respectivos vetores normais $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Seja A um ponto do espaço e defina uma reta r_1 por $r_1 : P = A + \alpha\vec{n}_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, temos que r_1 é uma reta perpendicular ao plano π_1. Analogamente, defina uma reta r_2 por $r_2 : P = A + \alpha\vec{n}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e, dessa forma, temos que r_2 é uma reta perpendicular ao plano π_2, como visto na Figura 2.10.

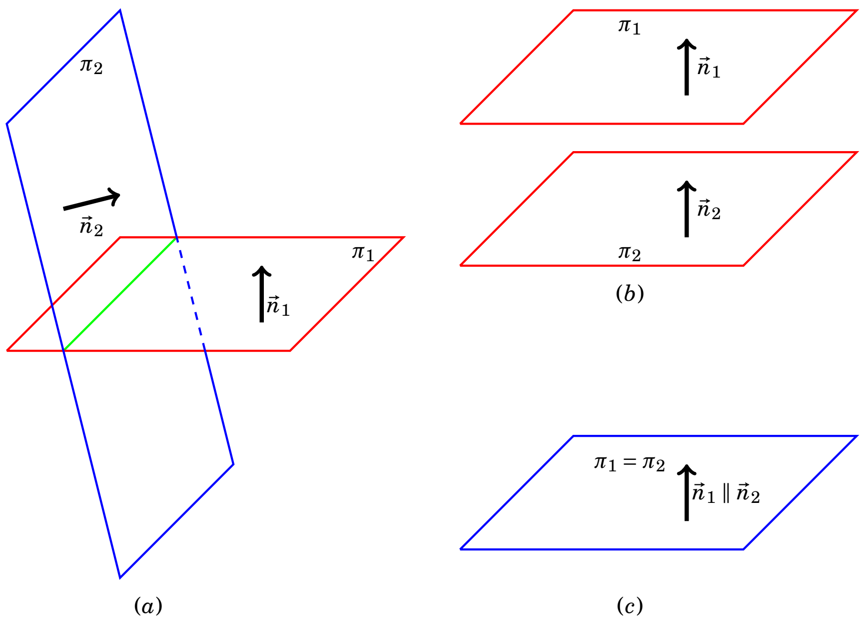


Figura 2.10: Ilustração da definição do ângulo entre dois planos.

Dessa forma, temos que o ângulo θ entre os planos π_1 e π_2 fica dado pela medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2, ou seja, sendo $\theta = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$, segue que

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||},$$

o que nos leva a definição a seguir.

Definição 2.7.3 *Sejam π_1 e π_2 dois planos com os respectivos vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Assim, o ângulo entre os planos π_1 e π_2, indicado por $\theta = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$, é o ângulo que satisfaz a seguinte relação*

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.7.19 *Encontre o valor do ângulo entre os planos* $\pi_1 : x - y + z - 20 = 0$ *e* $\pi_2 : P = (1,1,-2) + \alpha(0,-1,1) + \beta(1,-3,2)$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Solução: Temos que um vetor normal $\vec{n}_1$ ao plano π_1 é dado por $\vec{n}_1 = (1,-1,1)$ e um vetor normal $\vec{n}_2$ ao plano π_2 é dado por $\vec{n}_2 = (0,-1,1) \times (1,1,-2)$, ou seja,

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Dessa forma, temos que se $\theta = \sphericalangle(\pi_1, \pi_2)$, então,

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{|1-1+1|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, temos que $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ radianos. ■

Exemplo 2.7.20 *Obtenha uma equação geral para o plano* π_1 *que contém a reta* $r : \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$ *e que forme um ângulo de* 60^o *com o plano* $\pi_2 : x + z = 0$.

Solução: Como a reta r é dada por $r : \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$, segue que $x = 2y - 2z$ e $6y - 6z - 5y + 7z = 0$, ou seja, $y + z = 0$. Por isso, temos que a reta r pode ser reescrita por

$$r : \begin{cases} x = 0 - 4\alpha \\ y = 0 - \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 0 + \alpha \end{cases}.$$

Para obtermos uma equação geral para o plano π_1 precisamos obter um vetor normal $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ e um ponto A pertencente a esse plano. Dessa forma, como a reta r está contida em π_1, segue que o ponto $A = (0,0,0) \in \pi_1$.

Como $r \subset \pi_1$, segue que $\vec{u} \perp \vec{n}_1$, onde $\vec{u} = (-4,-1,1)$ é um vetor diretor da reta r. Daí, segue que $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0$ e, consequentemente,

$$(x, y, z) \cdot (-4,-1,1) = 0 \Rightarrow -4x - y + z = 0 \Rightarrow y = -4x + z.$$

O ângulo entre o plano π_1 e o plano π_2 é de 60^o, consequentemente,

$$\cos\left(60^o\right) = \frac{|(x,y,z) \cdot (1,0,1)|}{||(x,y,z)|| \cdot ||(1,0,1)||} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|x+z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{1+0+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|x+z|}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}} \Leftrightarrow x^2 + (z-4x)^2 + z^2 = 2(x^2+z^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16x^2 - 8xz + z^2 + z^2 = 2x^2 + 4xz + 2z^2 \Leftrightarrow 15x^2 - 12xz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x(5x-4z)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \text{ ou } 5x-4z=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{4z}{4}.$$

Assim, para o caso $x=0$, segue que $y=z$, ou seja, $\vec{n}_1=(0,1,1)$ e, consequentemente, temos que $\pi_1: y+z=0$. Por outro lado, se $x=\frac{4z}{5}$, segue que $y=-\frac{16z}{5}+z=-\frac{11z}{5}$ e, consequentemente, $\vec{n}_1=\left(\frac{4}{5},-\frac{11}{5},1\right) \parallel (4,-11,5)$ e, por isso, $\pi_1: 4x-11y+5z=0$. ■

Agora vamos falar de *Distâncias* entre os objetos estudados nesse curso. Lembremos que a distância entre dois pontos já foi apresentado no início do curso, na Seção 1.1. Para relembrar algumas das ideias que já utilizamos, vejamos um exemplo.

Exemplo 2.7.21 *Sejam $A=(a,b,c)$ e $B=(m,n,p)$ dois pontos distintos. Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de A e B é o plano mediador de $\overrightarrow{AB}$.*

Solução: O Plano Mediador de um segmento $\overline{AB}$ é o plano que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a $\overline{AB}$. Seja $P=(x,y,z)$ um ponto que esteja equidistante aos pontos $A=(a,b,c)$ e $B=(m,n,p)$. Assim, temos que

$$d(A,P)=d(P,B) \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+y^2+z^2-2cz+c^2=x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2+$$

$$+z^2-2pz+p^2 \Rightarrow 2ax-2mx+2by-2ny+2cz-2cp+(-a^2-b^2-c^2+m^2+n^2+p^2)=0 \Rightarrow$$

$$(2a-2m)x+(2b-2n)y+(2c-2p)+(-a^2-b^2-c^2+m^2+n^2+p^2)=0.$$

Dessa forma, tomando $A=2a-2m$, $B=2b-2n$, $C=2c-2p$ e $D=-a^2-b^2-c^2+m^2+n^2+p^2$, chegamos a equação de um plano

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0.$$

É preciso mostrar que o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ pertence ao plano π. Para isso, como $M=\left(\frac{a+m}{2},\frac{b+n}{2},\frac{c+p}{2}\right)$, segue que

$$A\left(\frac{a+m}{2}\right)+B\left(\frac{b+n}{2}\right)+C\left(\frac{c+p}{2}\right)+D=$$

$$=(2a-2m)+(2b-2n)\left(\frac{b+n}{2}\right)+(2c-2p)\left(\frac{c+p}{2}\right)+-a^2-b^2-c^2+m^2+n^2+p^2=$$

$$=a^2-m^2+b^2-n^2+c^2-p^2+(-a^2-b^2-c^2+m^2+n^2+p^2)=0.$$

Para finalizar, é preciso mostrar que $\overrightarrow{AB} \perp \pi$. Para isso, observe que um vetor normal ao plano π é dado por

$$\vec{n}=(A,B,C)=(2a-2m,2b-2n,2c-2p)=2(a-m,b-n,c-p)=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{AB}.$$

Consequentemente, $\overrightarrow{AB} \perp \pi$. Portanto, como o ponto $M \in \pi$ e como $\overrightarrow{AB} \perp \pi$, segue que o plano π é o plano mediador do segmento $\overline{AB}$. ■

Agora vamos determinar uma forma de calcular a distância de um ponto P a uma reta r. Para isso, é preciso determinar um ponto Q que seja a projeção ortogonal de P sobre r. Para isso, vamos estabelecer a distância do ponto P a reta r como a medida de uma altura de um triângulo.

Sejam $A \neq B$ dois pontos quaisquer de r. Assim, temos que área do triângulo ABP, denotada por A_T, fica dada por

$$A_T = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{BP}\right|\right|}{2}.$$

Sendo h a altura desse triângulo relativa ao vértice P, segue que h tem a mesma medida da distância de P a r, ou seja, $h = d(P,r)$. Logo, como pode ser escrita por $A_T = \dfrac{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|}{2}$, segue que

$$d(P,r) = h = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{BP}\right|\right|}{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|}.$$

Esse última equação nos leva a definição a seguir.

Definição 2.7.4 *Sejam P um ponto qualquer do espaço e $r : X = A + \alpha\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, uma reta. Então, a distância de P a r, denotada por $d(P,r)$, é o valor dado por*

$$d(P,r) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|\right|}{||\vec{u}||}.$$

Exemplo 2.7.22 *Calcule a distância de $P = (1,1,-1)$ à interseção dos planos $\pi_1 : x - y - 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$.*

Solução: A interseção dos planos π_1 e π_2 é a reta $r : \begin{cases} x - y - 1 &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{cases}$.
Assim, como $x = y + 1$, segue que $z = x + y = 2y + 1$ e, consequentemente, a reta r pode ser reescrita por $r : X = (1,0,1) + \alpha(1,1,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4,-2,-1).$$

Assim, temos que $d(P,r)$ fica dada por

$$d(P,r) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|\right|}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{16+4+1}}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Portanto, a distância entre o ponto P e a reta r é dada por $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ unidades de comprimento. ■

Exemplo 2.7.23 *Obtenha uma equação vetorial para a reta r de dista $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{20}}{3}$ unidades de comprimento do ponto $P = (1,0,1)$, que está contida no plano $\pi : x - 4y + z = 0$ e que seja paralela a reta $s : P = (1,1,0) + \alpha(2,1,2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Solução: Como a reta r é paralela a reta s, segue que um vetor diretor da reta s também é um vetor diretor para a reta r e, por isso, temos que um vetor diretor para a reta r fica dado por $\vec{u} = (2,1,2)$.

Agora precisamos encontrar um ponto da reta para construir a sua equação. Para isso, seja $A = (a,b,c) \in r$. Daí, como $r \subset \pi$, segue que $a - 4b + c = 0$. Além disso, como $d(P,r) = \dfrac{\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|\right|}{||\vec{u}||}$, segue que

$$\left|\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|\right|^2 = (d(P,r))^2\, ||\vec{u}||^2 \Rightarrow \left|\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\right|\right|^2 = \frac{20}{9}\left(2^2 + 1^2 + 2^2\right) = 20.$$

Como

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a-1 & b-0 & c-1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2b - c + 1, -2a + 2c, a - 2b - 1),$$

segue, consequentemente, que

$$\left|\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\right|\right|^2 = (2b - c + 1)^2 + (-2a + 2c)^2 + (a - 2b - 1)^2 =$$

$$= 5a^2 + 8b^2 + 5c^2 - 4ab - 8ac - 4bc - 2a + 8b - 2c - 18 = 0.$$

Tomando $b = 0$, chegamos as equações $a + c = 0$ e $5a^2 + 5c^2 - 8ac - 2a - 2c - 18 = 0$. Isolando a na primeira equação e substituindo na segunda obtemos $c^2 = 1$ e, por isso, temos que $A = (1,0,-1)$ ou $A = (-1,0,1)$ são pontos de r. Portanto, a reta r fica dada por

$$r : P = (-1,0,1) + \alpha(2,1,2),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \text{ou } r : P = (1,0,-1) + \alpha(2,1,2),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

Agora, falaremos da distância entre um ponto e um plano. Seja P um ponto do espaço e seja π um plano. Precisamos determinar o ponto Q que é a projeção ortogonal de P sobre π e, consequentemente, a medida da distância de P a π fica dado por $\left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\right|$. Para isso, seja $A \in \pi$. Assim, como $Proj_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ} = \dfrac{\left(\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right)}{(\vec{n} \cdot \vec{n})} \cdot \vec{n}$, segue que

$$d(P,\pi) = \left|\left|Proj_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\right|\right| = \left|\left|\frac{\left(\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right)}{(\vec{n} \cdot \vec{n})} \cdot \vec{n}\right|\right| = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right| \cdot ||\vec{n}||}{||\vec{n}||^2} = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\right|}{||\vec{n}||}.$$

Essa construção nos leva a definição a seguir.

Definição 2.7.5 *Seja X um ponto do espaço e seja $\pi : ax+by+cz+d=0$ um plano com vetor normal $\vec{n}=(a,b,c)$. Se $A\in\pi$ é um ponto qualquer, então, a distância de P a π, denotado por $d(X,\pi)$ é dado por*

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||}.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.7.24 *Calcule a distância do ponto $P=(1,2,-1)$ ao plano $\pi : 3x-4y-5z+1=0$.*

Solução: Como o plano π é dado por $\pi : 3x-4y-5z+1=0$, segue que um vetor normal ao π é dado por $\vec{n}=(3,-4,-5)$. Além disso, tomando $x=0=y$, obtemos o ponto $A=\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$ que pertence ao plano π. Consequentemente, temos que $d(P,\pi)$ fica dada por

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||}=\frac{\left|1.3+2.(-4)+\left(-\frac{6}{5}\right).(-5)\right|}{\sqrt{9+16+25}}=\frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Portanto, a distância entre o ponto P e o plano π fica dada por $d(P,\pi)=\frac{1}{\sqrt{50}}$.
$\blacksquare$

Exemplo 2.7.25 *Calcule a distância do ponto $P=(1,3,4)$ ao plano $\pi : P=(1,0,0)+\alpha(1,0,0)+\beta(-1,0,3)$.*

Solução: Como o plano π está escrito na forma vetorial, temos que um vetor normal a π fica dado por $\vec{n}=(1,0,0)\times(-1,0,3)$. Assim, como $A=(1,0,0)\in\pi$, segue que a distância de P a π fica dada por

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AP},(1,0,0),(-1,0,3)\right]\right|}{||(1,0,0)\times(-1,0,3)||}.$$

Como

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=(0,-3,0),$$

e como $\overrightarrow{AP}=(0,3,4)$, segue que

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||}=\frac{|0.0+3.3+4.0|}{\sqrt{0+9+0}}=\frac{9}{3}=3.$$

Portanto, a distância entre o ponto P e o plano π fica dada por $d(P,\pi)=3$. $\blacksquare$

Exemplo 2.7.26 *Encontre uma equação geral para o plano π que contém a reta $r : x-y=x+2z=x+z$ e que dista 2 do ponto $P=(1,2,-2)$.*

Solução: A reta r fica dada por $r:\begin{cases} y &= 0\\ z &= 0\end{cases}$. Consequentemente, temos que $r: X=(0.0.0)+\alpha(1,0,0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ um vetor normal ao plano. Assim, temos que $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$, onde $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r. Logo,

$$(a,b,c)\cdot(1,0,0)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow \vec{n}=(0,b,c).$$

Por outro lado, tomando $A=(0,0,0)\in\pi$, segue que $\overrightarrow{AP}=(1,2,-2)$ e, consequentemente,

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||}\Rightarrow 2=\frac{|1.0+2.b-2.c|}{\sqrt{0+b^2+c^2}}\Rightarrow 4(b^2+c^2)=4b^2-8bc+4c^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4bc=0.$$

Portanto, como B e C não podem ser zero ao mesmo tempo, tomando $b\neq 0$, segue que $c=0$. Consequentemente, o plano π fica dado por (tome $\vec{n}=(0,1,0)$) $\pi: y+d=0$. Como $A=(0,0,0)\in\pi$, temos que $d=0$ e, portanto, a equação do plano fica dada por

$$\pi: y=0.$$

■

Estudado a distância entre pontos e reta e pontos e planos, podemos estudar agora como calcular a distância entre retas. Para isso, sejam $r: X=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, e $s: X=B+\alpha\vec{v}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, duas retas. Logo, temos que uma, e somente uma, das três situações pode ocorrer:

a) r e s são retas concorrentes. Nesse caso, definimos que $d(r,s)=0$.

b) r e s são retas paralelas e iguais. Nesse caso, definimos que $d(r,s)=0$.

c) r e s são retas paralelas e distintas. Nesse caso, definimos que a distância entre r e s é igual a distância de qualquer um dos pontos de uma das retas à outra reta.

d) r e s são reversas. Nesse caso, existe um único plano π que contém a reta r e é paralelo a s. Dessa forma, sendo B um ponto qualquer de s, segue que $d(r,s)$ tem o mesmo valor de $d(B,r)$. Como um vetor normal ao plano π fica dado por $\vec{u}\times\vec{v}$, tomando o ponto $A\in r$, segue que a distância entre as retas r e s, denotada por $d(r,s)$, fica dada por

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}.$$

Vamos a definição de distância entre retas que utilizaremos a partir de agora.

Definição 2.7.6 *Sejam $r: X=A+\alpha\vec{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, e $s: X=B+\alpha\vec{v}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, duas retas. Assim, a Distância entre r e s, denotada por $d(r,s)$ é dada por* *a)* $d(r,s) = 0$, *r e s são retas concorrentes ou se r e s são retas paralelas e iguais.*

b) $d(r,s) = d(A,s) = d(B,r)$, *com* $A \in r$ *ou* $B \in s$, *quando r e s são retas paralelas e distintas.*

c) $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||}$, *quando r e s são reversas.*

Observação 2.7.7 *Não é necessário estudar a posição relativa entre duas retas r e s para se calcular a distância entre elas. Se* $r \times s = 0$, *temos que os planos são paralelos e, por isso, adotamos outra estratégia para o cálculo de distância, em vez fórmula sugeria na Definição 2.7.6.*

Vamos aos exemplos.

Exemplo 2.7.27 *Calcule a distância entre as retas* $r : X = (-1,2,0)+\alpha(1,3,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *e* $s : 3x-2z-3 = 0 = y-z-2$.

Solução: Para a reta s temos que $x = 1+\frac{2}{3}z$ e $y = 2+z$. Dessa forma, temos que a reta s fica dada por

$$s : \begin{cases} x &=& 1+\frac{2}{3}\alpha \\ y &=& 2+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z &=& 0+\alpha \end{cases}.$$

Dessa forma, temos que $\vec{u} = (1,3,1)$ é um vetor diretor para a reta r e que $\vec{v} = \left(\frac{2}{3},1,1\right)$ é um vetor diretor para a reta s. Dessa forma, temos que

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(2,-\frac{1}{3},-1\right) \neq 0.$$

Assim, tomando $A = (-1,2,0) \in r$ e $P = (1,2,0) \in s$ e, consequentemente, $\overrightarrow{AP} = (2,0,0)$, segue que a distância entre r e s fica dada por

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{||\vec{u}\times\vec{v}||} = \frac{|4|}{\sqrt{4+\frac{1}{9}+1}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{46}{9}}} = 4\cdot\frac{3}{\sqrt{46}} = \frac{12}{\sqrt{46}}.$$

Portanto, a distância entre as retas r e s é igual a $\frac{12}{\sqrt{46}}$ unidades de comprimento. ■

Exemplo 2.7.28 *Calcule a distância entre as retas* $r : \dfrac{x-1}{-2} = 2y = z$, *e* $s : X = (0,0,2)+\alpha\left(-2,\frac{1}{2},1\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solução: Como a reta r é dada por

$$r : \frac{x-1}{-2} = 2y = z \Rightarrow r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{1},$$

segue que um vetor diretor para a reta r fica dado por $\vec{u} = \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$. Além disso, como um vetor diretor para a reta s é dado por $\vec{v} = \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$, segue que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e, consequentemente, as retas r e s são paralelas e, por isso, temos que $d(r,s) = d(P,s)$, onde P é qualquer ponto de r.

Observe que $A = (0,0,2) \in s$, mas $A \notin r$, visto que $\frac{0-1}{-2} \neq 2.0 \neq 2$. Assim, as retas r e s são distintas e, consequentemente, $d(r,s) > 0$. Daí, tomando $P = (1,0,0) \in r$, segue que $\overrightarrow{AP} = (1,0,-2)$ e, por isso,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(1, 3, \frac{1}{2}\right).$$

Dessa forma, temos que

$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|}{||\vec{u}||} = \frac{\left|1+9+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{4+\frac{1}{4}+1}} = \frac{41}{2\sqrt{18}} = \frac{41}{6\sqrt{2}}.$$

Portanto, a distância entre as retas r e s é de $\frac{41}{6\sqrt{2}}$ unidades. ■

Exemplo 2.7.29 *Calcule a distância entre as retas* $r : x = \frac{y-3}{2} = z-2$, *e* $s : x-3 = \frac{y+1}{2} = z-2$.

Solução: A ■

Exemplo 2.7.30 *Obtenha uma reta* r *que contém o ponto* $A = (1,1,2)$, *que seja paralela ao plano* $\pi : x-2y+2z-4 = 0$ *e que dista* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *unidades de comprimento da reta* $s : X = (3,1,1) + \alpha(4,1,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solução: A ■

Exemplo 2.7.31 *Dadas as retas* $r : X = (0,0,1) + \alpha(1,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *e* $s : X = (0,0,0) + \alpha(0,1,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *e os pontos* $P = (0,1,1)$ *e* $Q = (0,1,2)$, *obtenha uma equação vetorial para a reta* t *que contém o ponto* P, *que seja concorrente com a reta* r *e que seja equidistante a reta* r *e o ponto* Q.

Solução: A ■

Agora falaremos da distância entre uma reta e um plano. Da mesma forma que entre retas, dadas uma reta r e um plano π temos que observar que uma, e apenas uma, das situações a seguir pode ocorrer:

1. r e π são concorrentes. Nesse caso, definimos que $d(r,\pi) = 0$.

2. r e π são paralelos e $r \subset \pi$. Nesse caso, definimos que $d(r,\pi) = 0$.

3. r e π são paralelos e distintas. Nesse caso, a distância de r a π é igual a distância de qualquer um dos pontos de r ao plano π.

Exemplo 2.7.32 *Dada a reta* $r : X = (1,9,4) + \alpha(3,3,3)$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, e o plano* $\pi : X = (5,7,9) + \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, calcule* $d(r,\pi)$*.*

Solução: A ■

Exemplo 2.7.33 *Calcule a distância entre o eixo das abscissas e o plano* $\pi : y + z = \sqrt{2}$*.*

Solução: A ■

Por fim, falaremos da distância entre dois planos. Dados dois planos π_1 e π_2 temos que observar que uma, e apenas uma, das situações a seguir pode ocorrer:

1. π_1 e π_2 são secantes. Nesse caso, definimos que $d(\pi_1,\pi_2) = 0$.

2. π_1 e π_2 são paralelos e coincidentes. Nesse caso, definimos que $d(\pi_1,\pi_2) = 0$.

3. π_1 e π_2 são paralelos e distintos. Nesse caso, a distância de π_1 a π_2 é igual a distância de qualquer uma das retas de um dos planos aou outro plano.

Exemplo 2.7.34 *Calcule a distância entre os planos* $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ *e* $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$*.*

Solução: A ■

Exemplo 2.7.35 *Calcule a distância entre os planos* $\pi_1 : x + y + z = 0$ *e* $\pi_2 : 2x + y + z + 2 = 0$*.*

Solução: A ■

2.8 Exercícios

Exercício 2.8.1 *Dados o ponto* $A = (3,4,-2)$ *e a reta* $r : \begin{cases} x &= 1+\sqrt{2}t \\ y &= t \\ z &= 5-3t \end{cases}$ *:*

a) Determine equações paramétricas da reta que passa por A *e é perpendicular a* r*.*

b) Calcule a distância de A *a* r*.*

c) determine o ponto simétrico de A *em relação a* r*.*

Exercício 2.8.2 *Calcule a distância do ponto* $A = (3,4,-2)$

1. *ao plano* XY*;*
2. *ao plano* XZ*;*
3. *ao plano* YZ*;*
4. *ao eixo* X*;*
5. *ao eixo* Y*;*
6. *ao eixo* Z*;*