1.13 A Regra da Cadeia para funções reais de várias variáveis

Para funções reais de uma variável real, a Regra da Cadeia é dada por:

Se y é uma função de u definida por $y = f(u)$ onde $D_u y$ existe, e se u é uma função de x, definida por $u = g(x)$, também onde $D_x u$ existe, então, y é uma função de x e $D_x y = D_u y D_x u$, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Para funções reais de duas variáveis a extensão da regra da cadeia é apresentada no teorema dado a seguir.

Teorema 1.13.1 *Sejam $u = u(x, y)$, $x = x(r, s)$ e $y = y(r, s)$ funções reais de duas variáveis Diferenciáveis. Então, u é uma função de r e s e, além disso,*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

É importante destacar que os símbolos $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, etc., não podem ser considerados frações, visto que os símbolos ∂u, ∂x não fazem sentido estando sozinhos. Outra dificuldade na notação surge quando consideramos u como uma função de x e y e essas como funções de r e s. Se $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ e $y = G(r, s)$, então, $u = f(F(r, s), G(r, s))$ e não $u = f(r, s)$. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.13.1 *Sejam $f(x, y) = xy$, $x(u, v) = u^2 + v^3$ e $y(u, v) = 2u + 3v$.*

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$, usando a regra da cadeia;

b) Obtenha a função F dada por $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$;

c) Calcule $\frac{\partial F}{\partial u}$ e $\frac{\partial F}{\partial v}$.

Solução:

a) Da regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Assim, como $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$ e $\frac{\partial y}{\partial u} = 2$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = y \cdot 2u + x \cdot 2 = (2u + 3v)\cdot 2u + (u^2 + v^3)\cdot 2 =$$

$$= 4u^2 + 6uv + 2u^2 + 2v^3 = 6u^2 + 6uv + 2v^3.$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Assim, como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 3v^2$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 3$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial v} = y \cdot 3v^2 + x \cdot 3 = (u^2 + v^3) \cdot 3v^2 + (2u + 3v) \cdot 3 =$$

$$= 6uv^2 + 9v^3 + 3u^2 + 3v^3 = 3u^2 + 6uv^2 + 12v^3.$$

b) Temos que

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = (u^2+v^3)\cdot(2u+3v) = 2u^3+3u^2v+2uv^3+3v^4.$$

c) Por fim,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(2u^3 + 3u^2v + 2uv^3 + 3v^4) = 6u^2 + 6uv + 2v^3 \text{ e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(2u^3 + 3u^2v + 2uv^3 + 3v^4) = 3u^2 + 6uv^2 + 12v^3.$$

■

Exemplo 1.13.2 *Dado* $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = re^s$, $y = re^{-s}$, *com* $r > 0$. *Encontre* $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial s}$.

Solução: Observe que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial x}{\partial r} = e^s$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = re^s$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = e^{-s}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$. Assim, pela regra da Cadeia, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}e^s + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}e^{-s} =$$

$$= \frac{re^{2s} + re^{-2s}}{\sqrt{r^2(e^{2s} + e^{-2s})}} = \sqrt{e^{2s} + e^{-2s}} \text{ e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}re^s + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-re^{-s}) =$$

$$= \frac{r^2e^{2s} - r^2e^{-2s}}{\sqrt{r^2(e^{2s} + e^{-2s})}} = \frac{r(e^{2s} - e^{-2s})}{\sqrt{e^{2s} + e^{-2s}}}.$$

■

Exemplo 1.13.3 *Sendo* $z = h(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $x = F(r, s) = re^s$ *e* $y = G(r, s) = re^{-s}$, *com* $r > 0$*:*

a) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial s}$*, usando a regra da cadeia;*

b) Obtenha a função H *dada por* $H(r,s) = h(x(r,s), y(r,s)$*;*

c) A função $H(r,s)$ *é igual a função* $h(r,s)$*?*

Solução:

a) Como $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial x}{\partial r} = e^s$ e $\dfrac{\partial y}{\partial r} = e^{-s}$, segue que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{x}{x^2+y^2} \cdot e^s + \frac{y}{x^2+y^2} \cdot e^{-s} = \frac{re^{2s}}{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}} + \frac{re^{-2s}}{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}} = \frac{1}{r}.$$

Por outro lado, como $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = re^s$ e $\dfrac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$, segue que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{x}{x^2+y^2} \cdot re^s + \frac{y}{x^2+y^2} \cdot (-re^{-s}) = \frac{r^2e^{2s}}{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}} - \frac{r^2e^{-2s}}{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}} =$$

$$= \frac{e^{2s}-e^{-2s}}{e^{2s}+e^{-2s}}.$$

b) Temos que $F(r,s) = f(F(r,s), G(r,s)) = \ln\left(\sqrt{r^2e^{2s}+r^2e^{-2s}}\right)$.

c) Observe que $f(r,s) = \ln\left(\sqrt{r^2+s^2}\right)$, logo $f(r,s) \neq H(r,s)$.

■

Suponha, agora que $u = u(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sejam funções de Classe C^1. Assim, em vez da derivada parcial de u em relação a t teremos a derivada ordinária de u em relação a t, que é dada por:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{1.7}$$

Assim, se u é uma função de n funções diferenciáveis, digamos $x_1, \cdots, x_n$ de uma única variável t, então, u é uma função de t e a sua derivada total fica dada por

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}.$$

Exemplo 1.13.4 *Dado* $u = x^2 + 2xy + y^2$*,* $x = t\cos(t)$ *e* $y = tsen(t)$*, encontre* $\dfrac{du}{dt}$ *por dois métodos:*

a) Usando a Regra da Cadeia;

b) Expressando u *em termos de* t *antes da diferenciação.*

Solução:

a) Calculando as derivadas, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x + 2y$, $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \cos(t) - t\text{sen}(t)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \text{sen}(t) + t\cos(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= (2x+2y)(\cos(t) - t\text{sen}(t)) + (2x+2y)(\text{sen}(t) + t\cos(t)) = \\ &= 2(x+y)(\cos(t) - t\text{sen}(t) + \text{sen}(t) + t\cos(t)) = \\ &= 2(t\cos(t) + t\text{sen}(t))(\cos(t) - t\text{sen}(t) + \text{sen}(t) + t\cos(t)) = \\ &= 2t(1 + \text{sen}(2t) + t\cos(2t)).\end{aligned}$$

b) Expressando u em termos de t, antes da diferenciação, temos que $u = (t\cos(t))^2 + 2(t\cos(t))(t\text{sen}(t)) + (t\text{sen}(t))^2 = t^2 + t^2\text{sen}(2t)$. Assim, chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(t^2(1 + \text{sen}(2t))\right)' = 2t(1 + \text{sen}(2t)) + t^2(2\cos(2t)) = \\ &= 2t + 2t\text{sen}(2t) + 2t^2\cos(2t) = 2t(1 + \text{sen}(2t) + t\cos(2t)).\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.13.5 *Sejam $z = x^2y$, $x(t) = e^{t^2}$ e $y(t) = 2t + 1$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.*

Solução: Da regra da cadeia, temos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Assim, como $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2$, $\dfrac{dx}{dt} = e^{t^2} \cdot \left(\dfrac{d}{dt}(t^2)\right) = 2te^{t^2}$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2xy \cdot 2te^{t^2} + x^2 \cdot 2 = 2 \cdot e^{t^2} \cdot (2t+1) \cdot 2te^{t^2} + 2\left(e^{t^2}\right)^2 = \\ &= 2e^{2t^2}(4t^2 + 2t) + 2e^{2t^2} = 2e^{2t^2}\left[4t^2 + 2t + 1\right].\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.13.6 *Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \text{sen}(t))$, onde $f(x,y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.*

a) Expresse $F'(t)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 5$, calcule $F'(0)$.

Solução:

a) Tome $x(t) = e^{t^2}$ e que $y(t) = \text{sen}(t)$. Assim, temos que $\dfrac{dx}{dt} = e^{t^2}\dfrac{d}{dt}(t^2) = 2te^{t^2}$ e $\dfrac{dy}{dt} = \cos(t)$. Daí, consequentemente, temos que

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(t) = 2te^{t^2}\frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \text{sen}(t)) + \cos(t)\frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \text{sen}(t)).$$

b) Observe que para $t = 0$ temos que $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. Dessa forma, segue que

$$F'(0) = 2\cdot 0\cdot e^{0^2}\frac{\partial f}{\partial x}(e^{0^2}, sen(0)) + \cos(0)\frac{\partial f}{\partial y}(e^{0^2}, sen(0)),$$

o que nos leva a

$$F'(0) = 1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1\cdot 5 = 5.$$

■

Agora, vamos estender a regra da cadeia para um número qualquer de variáveis.

Teorema 1.13.2 *Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$, e cada uma dessas variáveis, por sua vez, seja uma função de m variáveis $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Suponha ainda, que cada uma das variáveis parciais $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ $(i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m)$ exista. Então, u é uma função de $y_1, y_2, \cdots, y_m$ e, além disso,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_1};\\
\frac{\partial u}{\partial y_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_2};\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac{\partial u}{\partial y_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_m}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Vamos a mais um exemplo.

Exemplo 1.13.7 *Dado $u(x,y,z) = xy + xz + yz$, com $x(r,s) = r$, $y(r,s) = r\cos(t)$ e $z(r,s) = r\text{sen}(t)$, ache $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$.*

Solução: Observe que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x+y$, $\dfrac{\partial x}{\partial r} = 1$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = 0$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos(s)$, $\dfrac{\partial y}{\partial s} = -r\text{sen}(s)$, $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \text{sen}(s)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial s} = r\cos(s)$. Daí, usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (y+z)(1) + (x+z)(\cos(s)) + (x+y)(\text{sen}(s)) =$$

$$= y + z + x\cos(s) + z\cos(s) + x\text{sen}(s) + y\text{sen}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 2r(\cos(t) + \text{sen}(t)) + r\text{sen}(2t) \text{ e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (y+z)(0) + (x+z)(-r\text{sen}(t)) + (x+y)(r\cos(t)) =$$

$$= -xr\text{sen}(t) - zr\text{sen}(t) + xr\cos(t) + yr\cos(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = r^2(\cos(t) - \text{sen}(t)) + r^2\cos(2t).$$

■

Agora, faça alguns exercícios para fixar os conceitos.

1.14 Exercício

Exercício 1.14.1 *Para cada item abaixo, encontre as derivadas parciais* $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ *pelos métodos: (a) Usando a regra da cadeia; (b) fazendo a substituição de x e y antes de diferenciar, sendo:*

a) $u = \text{sen}(xy)$, $x = 3r + 2s$ *e* $y = 2r - 5s$;

b) $u = x^2 + 3y^2$, $x = r\sqrt{3}\text{sen}(s)$ *e* $y = r\cos(s)$;

c) $u = x^2 - y^2$, $x = 2r - 3s$ *e* $y = r + s$;

d) $u = x^2 - y^2$, $x = 2r - 3s$ *e* $y = r + s$;

e) $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y$, $x = 3r - s$ *e* $y = r + 2s$;

f) $u = e^{\frac{y}{x}}$, $x = 2r\cos(s)$ *e* $y = 4r\text{sen}(s)$;

g) $u = x^2 + y^2$, $x = \cosh(r)\cos(s)$ *e* $y = \text{senh}(r)\text{sen}(s)$.

Exercício 1.14.2 *Em cada item abaixo encontre a derivada total* $\dfrac{du}{dt}$ *da função u.*

a) $u = ye^x + xe^y$, *sendo* $x = \cos(t)$ *e* $y = \text{sen}(t)$;

b) $u = \ln(xy) + y^2$, *sendo* $x = e^t$ *e* $y = e^{-t}$;

c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *sendo* $x = \tan(t)$, $y = \cos(t)$ *e* $z = \text{sen}(t)$, *para* $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$;

Exercício 1.14.3 *Seja* $z = f(x^2, 3x+1)$*, onde* $f(u,v)$ *é uma função de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$*.*

a) Expresse $\dfrac{dz}{dx}$ *em termos das derivadas parciais de* f*.*

b) Verifique que $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,4) + 3\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,4)$*.*

Exercício 1.14.4 *Seja* $f(x,y)$ *uma função de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$*, tal que* $f(3x+1, 3x-1) = 4$*. Verifique que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1)$*.*

Exercício 1.14.5 *Seja* $z = f(u^2+v^2, uv)$*, onde* $f(x,y)$ *é uma função de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$*. Expresse* $\dfrac{dz}{du}$ *e* $\dfrac{dz}{dv}$ *em termos das derivadas parciais de* f*.*

Exercício 1.14.6 *Num determinado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é* 10*cm e ele está crescendo a uma taxa de* 1*cm/min; o comprimento de do outro cateto é* 12*cm e ele está decrescendo a uma taxa de* 2*cm/min. Ache a taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de* 12*cm de comprimento, num dado instante.*

Exercício 1.14.7 *A altura de um cilindro circular reto está decrescendo a uma taxa de* 10*cm/min e o raio está crescendo a uma taxa de* 4*cm/min. Ache a taxa de varição do volume no instante em que a altura é* 50*cm e o raio é* 16*cm.*

Exercício 1.14.8 *Seja* f *é uma função diferenciável de* x*,* y *e* z*, com* $\omega = f(x,y,z)$*. Se* $x = rsen(\phi)\cos(\theta)$*,* $y = rsen(\phi)\cos(\theta)$ *e* $z = rcos(\phi)$*, expresse* $\dfrac{\partial \omega}{\partial r}$*,* $\dfrac{\partial \omega}{\partial \phi}$ *e* $\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta}$ *em termos de* $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$*,* $\dfrac{\partial \omega}{\partial y}$ *e* $\dfrac{\partial \omega}{\partial z}$*.*

Exercício 1.14.9 *Se* f *é uma função diferenciável de* x *e* y*, e se* $u = f(x,y)$*,* $x = r\cos(\theta)$ *e* $y = rsen(\theta)$*, mostre que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{sen(\theta)}{r} \;\; e \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}sen(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}.$$

Exercício 1.14.10 *Seja* $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis dada por* $\omega = F(u,v)$*, com* $\omega \neq 0$*, para todo* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$*. Suponha que para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tenhamos que* $F(xy, z) = 0$*, onde* $z = z(x,y)$*. Mostre que* $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$*.*

Exercício 1.14.11 *Seja* $f(x,y)$ *diferenciável e homogênea de grau* λ *num aberto* A*. Prove que:*

a)

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(at,bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at,bt) = \lambda t^{\lambda-1} f(a,b),$$

para todo $t > 0$ *e para todo* $(a,b) \in A$*, com* $(at,bt) \in A$*.*

b) Conclua da primeira parte que vale a relação de Euler, ou seja,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y).$$

Sugestão*: Derive em relação a t os dois lados da igualdade $f(xt, yt) = t^{\lambda} f(x,y)$.*