9.2 Funções Côncavas e Convexas

Nesse seção vamos estabelecer os conceitos relacionados a concavidade. Para isso, precisamos de algumas definições preliminares. Vamos começar com a definição de reta.

Definição 9.2.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq b$. Assim, a Reta que passa pelos pontos $(a, A), (b, B) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$y = A + \left(\frac{B - A}{b - a}\right)(x - a) = B + \left(\frac{B - A}{b - a}\right)(x - b).$$

Definição 9.2.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e sejam $a, b \in X$. O segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a)), (b, f(b)) \in Gr(f)$ é chamado de Secante ab.*

Definição 9.2.3 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita ser Convexa quando o seu gráfico situa-se abaixo de qualquer de suas secantes.*

Observação 9.2.1 *O que a Definição 9.2.3 nos diz é que se uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa, então, para todo $a, b \in I$, tomando $a < x < b$, segue que*

$$f(x) \leq f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) \text{ ou } f(x) \leq f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b).$$

Teorema 9.2.1 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, valem as seguintes desigualdades*

$$a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \tag{9.1}$$

Demonstração: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Dessa forma, se $a < x < b$, segue que

$$f(x) \leq f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) \text{ ou } f(x) \leq f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b).$$

Como $f(x) \leq f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$, segue que $f(x) - f(a) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$ e, sendo $x > a$, então, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Por outro lado, como $f(x) \leq f(b) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b)$, segue que $f(x) - f(b) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b)$ e, sendo $x < b$, então, $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Portanto,

$$a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Reciprocamente, como $a < x < b$ implica em $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$, segue que:

- $x > a \Rightarrow f(x) - f(a) \leq \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$ e

- $x < b \Rightarrow f(x) - f(b) \leq \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b) \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - b)$

e, consequentemente, segue da Observação 9.2.1 que f é uma função convexa. $\blacksquare$

Observação 9.2.2 *As desigualdades dadas pela Equação 9.1 nos diz que numa função convexa $f : I \to \mathbb{R}$, com $a < x < b \in I$, temos que a secante ax tem inclinação menor do que a secante ab e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante xb. A Figura 9.1 ilustra essa observação.*

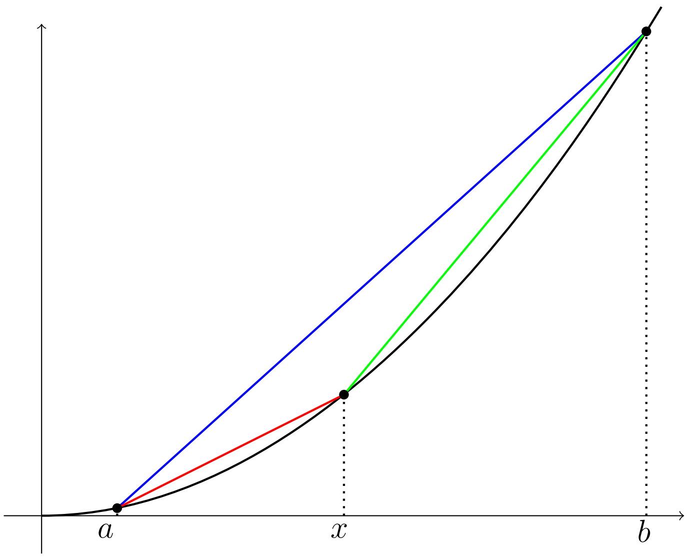

Figura 9.1: Ilustração do gráfico de uma função convexa.

Teorema 9.2.2 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo $c \in \mathring{I}$.*

Demonstração: Seja $c \in \mathring{I}$. Considere a função $\phi_c : J \to \mathbb{R}$, com $J = I \cap (-\infty, c)$, dada por

$$\phi_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Do Teorema 9.2.1 temos que ϕ_c é uma função monótona no intervalo J. Além disso, como $c \in \mathring{I}$, existe $b \in I$ tal que $c < b$ e, dessa forma,

$$\phi_c(x) \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c},$$

ou seja, a função ϕ_c é limitada superiormente. Logo, do Teorema 6.2.1 que o limite de ϕ_c quando $x \to c_-$ existe, ou seja, $f'_-(c)$ existe em todo $c \in \mathring{I}$. O outro caso é similar e, por isso, é deixado de exercício. ■

Corolário 9.2.1 *Seja I um intervalo. Uma função convexa $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto $c \in \mathring{I}$.*

Demonstração: Do Teorema 9.2.2 temos que $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ existem em todo $c \in \mathring{I}$. Dessa forma, segue da Observação 8.1.4, Item c, que f é contínua à direita e à esquerda. Em outras palavras, $f(c)$ existe e, além disso,

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c_-} f(x)$$

e,consequentemente, f é contínua em c. ■

Observação 9.2.3 *A convexidade é uma condição suficiente para que uma função $f : I \subset \mathbb{R}$ seja contínua num ponto $c \in \mathring{I}$, mas ela não é necessária. Ou seja, existem funções convexas que não são contínuas em $c \in \mathring{I}$.*

Exemplo 9.2.1 *A função*

$$\begin{array}{rcl} f: \ [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{array}{ll} 0, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & se \quad x = 0 \end{array} \end{array}$$

é uma função convexa, mas não é uma função contínua.
De fato: *Observe que*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{0 - 1}{x} = \frac{-1}{x}, \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 1}{1} = -1 \ e$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x - 1}{x} = 0.$$

Como $0 < x < 1$, segue que $\frac{1}{x} > 1$ e, consequentemente, segue que $-\frac{1}{x} < -1$. Portanto, como $0 < x < 1$ implica em

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

segue que f é uma função convexa. □

É óbvio que a função f não é contínua em $x = 0$. Logo, existem funções convexas que não são contínuas.

Teorema 9.2.3 *Seja I um intervalo. As seguintes afirmações sobre uma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

a) f é convexa.

b) A derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente.

c) *Para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer uma de suas tangentes.*

Demonstração: Vamos mostrar a seguinte cadeia de implicações: $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Seja I um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $a < x < b$ em I, temos do Teorema 9.2.1 temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Fazendo $x \to a_+$, como f é derivável, temos que

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Analogamente, fazendo $x \to b_-$, como f é derivável, temos que

$$f'(b) = f'_-(a) = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Portanto, temos que $a < b$ implica em $f'(a) \leq f'(b)$, ou seja, f' é uma função monótona não-decrescente.

$(b) \Rightarrow (c)$: Seja I um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f' : I \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente. Suponha que $a < x$ em I. Assim, pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 8.4.3), existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como f' é monótona não-decrescente, segue que $f'(a) \leq f'(z)$ e, consequentemente,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \text{ se } a < x.$$

Como a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$r_T : y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

segue que o gráfico de f está situado acima de r_T.

$(c) \Rightarrow (b)$: Sejam $a < x < b$ em I. Defina $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ e considere

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \alpha(x)\}.$$

Em outras palavras H é o semiplano superior delimitado pela reta $r : y = \alpha(x)$, que é tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Observe que quaisquer dois pontos de H determinam um segmento de reta que está totalmente contido em H e, por isso, H é um conjunto convexo do plano. Como, $a, b \in I$, segue das hipóteses que $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ estão em H e, consequentemente, o segmento de reta ligando esses dois pontos está contido em H.
Em particular, o ponto $(c, f(c)) \in H$ e, por isso, $f(c) \leq \alpha(c)$, ou seja,

$$f(c) = f(a) + f'(a)(c - a) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $a < c < b$ são quaisquer em I, segue que f é uma função convexa. ■

Exemplo 9.2.2 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função dada por . Observe na Figura 9.2 que o gráfico de f está acima de qualquer uma de suas tangentes.*

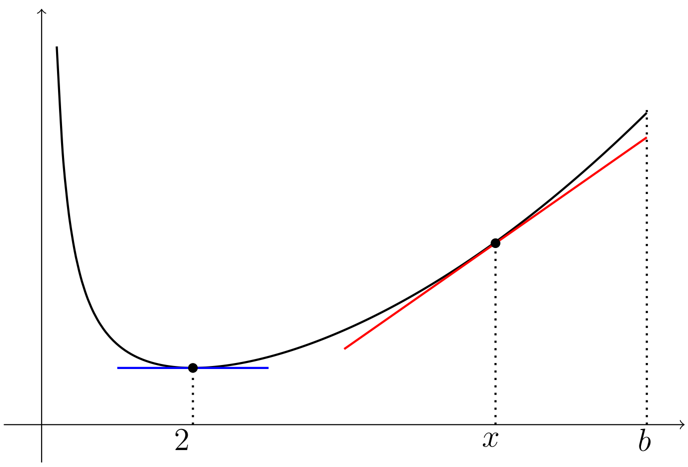

Figura 9.2: Ilustração do gráfico de uma função convexa.

Corolário 9.2.2 *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

Demonstração: Se c é um ponto crítico de uma função derivável convexa $f : I \to \mathbb{R}$, então, $f'(c) = 0$ Dessa forma, do Teorema 9.2.3 que $f(x) \geq f(c) + 0 \cdot (x - c)$ para todo $x \in I$, ou seja, $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$ e, por isso, c é um ponto de mínimo absoluto de f em I. ■

Corolário 9.2.3 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável no interior do intervalo I é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração: Temos que $f''(x) \geq 0$ se, e somente se, $f'(x)$ é monótona não-decrescente (segue do Teorema 8.3.1 e seus corolários). Assim, a equivalência sai do Teorema 9.2.3. ■

Definição 9.2.4 *Dizemos que uma função derivável $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Côncava se a função $-f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa.*

Observação 9.2.4 *a) Em outras palavras, uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é côncava quando o seu gráfico está acima de qualquer uma das suas secantes.*

b) As desigualdades de caracterizam as funções côncavas são análogas as obtidas na Equação 9.1, apenas é necessário trocar $\leq$ por $\geq$.

c) *Da mesma forma que para as funções convexas, existem as derivadas laterais de uma função côncava em todos os pontos do interior do seu domínio e, por isso, temos que a função é contínua nos pontos interiores ao seu domínio.*

d) *Uma função é côncava se, e somente se, sua derivada é monótona não-crescente.*

e) *Uma função duas vezes derivável é côncava se, e somente se, a sua derivada segunda é não-negativa.*

f) *Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.*

Definição 9.2.5 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita ser Extritamente Convexa quando $a < x < b$ em I implica em*

$$f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definição 9.2.6 *Dizemos que uma função derivável $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Extritamente Côncava se a função $-f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é extritamente convexa.*

Observação 9.2.5 a) *Dizer que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente côncava ou estritamente convexa equivale a dizer que a função não possui trecho formado por segmentos de reta. Além disso,*

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \text{ crescente } \Rightarrow f(x) \text{ é estritamente convexa.}$$

b) *Observe que convexidade estrita implica que f' seja crescente, mas não implica em $f'' > 0$.*

Exemplo 9.2.3 a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2n}$ é extremamente convexa, mas $f''(0) = 0$.*

De fato: *Temos que $f'(x) = 2nx^{2n-1}$ que é uma função crescente. Dessa forma, temos que f é estritamente convexa. Por outro lado, $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$ e, por isso, $f''(0) = 0$.* □

b) *A função exponencial $f(x) = e^x$ é estritamente crescente. Portanto, f é uma função convexa. Por sua vez, a sua inversa $g(y) = \ln(y)$ é uma função estritamente côncava, para $y > 0$, visto que $g''(y) = -\dfrac{1}{y^2} < 0$, para todo $y > 0$.*

c) *A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é côncava se $x < 0$ e convexa se $x > 0$, visto que $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} < 0$, se $x < 0$ e $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} > 0$, se $x > 0$.*

Teorema 9.2.4 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $a, b \in I$ e $0 \leq t \leq 1$ impliquem em*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Demonstração: Considere $x \in [a, b]$. Então, temos que x pode ser escrito na forma

$$x = (1-t)a + tb, \text{ com } t \in [0, 1].$$

Dessa forma, no segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, o ponto de abscissa $x = (1-t)a + tb$ leva a

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f((1-t)a + tb) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((1-t)a + tb - a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f((1-t)a + tb) \leq f(a) + t(f(b) - f(a)) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Portanto, f é convexa se, e somente se, $a, b \in I$ e $0 \leq t \leq 1$ impliquem em

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

■

Corolário 9.2.4 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, a_2 \in I$ e $t_1, t_2 \in [0, 1]$, tais que $t_1 + t_2 = 1$, temos que*

$$f(t_1a_1 + t_2a_2) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2).$$

Demonstração: Exercício. ■

Corolário 9.2.5 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, a_2, a_3 \in I$ e $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$, tais que $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, temos que*

$$f(t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + t_3f(a_3).$$

Demonstração: Observe que

$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 = (t_1 + t_2)\left[\frac{t_1}{t_1 + t_2}a_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2}a_2\right] + t_3a_3.$$

Como $(t_1 + t_2) + t_3 = 1$ e $\dfrac{t_1}{t_1 + t_2} + \dfrac{t_2}{t_1 + t_2} = 1$, aplique o corolário anterior duas vezes que o resultado fica provado. ■

Por indução podemos provar que o resultado a seguir é válido.

Corolário 9.2.6 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in I$ e $t_1, \cdots, t_n \in [0, 1]$, tais que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, temos que*

$$f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n).$$

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 9.2.4 *Mostre que para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$ temos que*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot (\cdots) \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ou seja, que a média geométrica entre n números é menor do que ou igual a sua média aritmética.

Solução: Considere a função convexa $f(x) = e^x$ e n números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Seja também, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$. Além disso, sejam $a_1 = \ln(x_1)$, $a_2 = \ln(x_2)$, $\cdots$, $a_n = \ln(x_n)$. Dessa forma, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ temos que

$$a_i = \ln(x_i) \Leftrightarrow x_i = e^{a_i}.$$

Dessa forma, temos que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot (\cdots) \cdot x_n} = \sqrt[n]{e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdot (\cdots) \cdot e^{a_n}} =$$

$$= \sqrt[n]{e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}} = e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}} = f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n) \leq$$

$$\leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \cdots + t_n f(a_n) = \frac{e^{a_1} + e^{a_2} + (\cdots) + e^{a_n}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

■

Exemplo 9.2.5 *Mostre que para quaisquer $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$ e $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{R}_+$, com $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, temos que*

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot (\cdots) \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n.$$

Solução: Utilizando o fato da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = \exp(x) = e^x$ ser convexa, e que a função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \ln(y)$ é a sua inversa, temos que:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot (\cdots) \cdot x_n^{t_n} = \exp\left(\ln\left(x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot (\cdots) \cdot x_n^{t_n}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\ln\left(x_1^{t_1}\right) + \ln\left(x_2^{t_2}\right) + \cdots + \ln\left(x_n^{t_n}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(t_1 \ln(x_1) + t_2 \ln(x_2) + \cdots + t_n \ln(x_n)\right) \leq$$

$$\leq t_1 \exp(\ln(x_1)) + t_2 \exp(\ln(x_1)) + \cdots + t_n \exp(\ln(x_n)) =$$

$$= t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n.$$

■

Observação 9.2.6 *A desigualdade do Exemplo 9.2.4 é um caso particular da desigualdade do Exemplo 9.2.5, onde no primeiro caso, temos que $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$.*